

QUARTO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Prof. F. Ferrari

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e delle Risorse

Esercizio 1 (12 punti)

Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+3y^2}{1+x} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

- (i) determinare l'insieme di \mathbb{R}^2 in cui esiste ed è unica la soluzione locale;
- (ii) calcolare la soluzione del problema di Cauchy al variare di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
- (iii) disegnare le soluzioni determinandone in particolare monotonia e convessità;
- (iv) scrivere la formula di Taylor all'ordine 2 della soluzione con dati iniziali $y(1) = \frac{1}{6}$.

Esercizio 2 (11 punti).

Siano $b \in L^\infty(-1, 1)$, $b > 2$ e $f \in L^2(-1, 1)$. Assegnato il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -y'' + b(x)y = f \\ y(-1) = y(1) = 0, \end{cases}$$

- (i) il candidato scriva la formulazione variazionale del problema in $W_0^{1,2}(-1, 1)$;
- (ii) il candidato provi l'esistenza di una soluzione variazionale in $W_0^{1,2}(-1, 1)$ del suddetto problema verificando le ipotesi del Teorema di Lax-Milgram.

Esercizio 3 (7 punti).

Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-x^2}$ due funzioni assegnate.

- (i) Provare che $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
- (ii) Scrivere la definizione di $h * p$ (h convoluto con p) e poi determinarne esplicitamente l'espressione nel caso delle funzioni assegnate f e g .
- (iii) La funzione $f * g$ determinata al punto (ii) appartiene a $L^2(\mathbb{R})$? Motivare la risposta.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.