

**SECONDA PROVA PARZIALE (SECONDO APPELLO) DI COMPLEMENTI  
DI ANALISI MATEMATICA**

Prof. F. Ferrari

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea in Ingegneria per  
l'Ambiente e delle Risorse

Esercizio 1 (8 p.ti)

Utilizzando il metodo della separazione delle variabili risolvere il seguente problema:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (0, \pi), \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t), & t > 0 \\ u(0, x) = 9x^3, & (0, \pi) \\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, & (0, \pi). \end{cases}$$

Esercizio 2

Siano  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e  $c \in \mathbb{R}$  una costante.

(a). (1 p.ti) Calcolare la trasformata di Fourier di  $g(x) = f(x + c)$ .

(b). (2 p.ti) Se indichiamo con  $\mathcal{F}g$  la trasformata di Fourier di  $g$  provare, motivando ogni passaggio che vale la formula:

$$\mathcal{F}g(\xi) = e^{ic\xi} \mathcal{F}f(\xi),$$

dove  $\mathcal{F}f(\xi)$  indica la trasformata di Fourier di  $f$ .

(b). (1 p.to) Scrivere la trasformata di Fourier della funzione  $\chi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

(c). (2 p.ti) Se indichiamo con  $s \equiv \mathcal{F}\chi$  la trasformata di Fourier della funzione  $\chi$  definita al punto (b) verificare, motivando ogni passaggio, che  $s \in L^2(\mathbb{R})$ .

(d). (1 p.to) Scrivere l'uguaglianza di Parseval

Esercizio 3 (Facoltativo) (5 p.ti) Definiamo la successione di funzioni  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , come segue: per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$s_k(x) = s(\pi - k),$$

dove  $s$  è la funzione ottenuta al punto (c) dell'Esercizio 2. Utilizzando l'uguaglianza di Parseval provare che  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , è un sistema ortogonale di funzioni in  $L^2(\mathbb{R})$ .

**N.B.** Gli studenti hanno a disposizione **2 ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.