

TERZO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Prof. F. Ferrari

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e delle Risorse

Esercizio 1 (8 punti)

Calcolare autovalori e autofunzioni del seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & (-\pi, \pi) \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 (13 punti).

Sia $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

e la convergenza della serie di Fourier è uniforme provare che vale la seguente uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

dove $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ sono i coefficienti di Fourier di f . Rispondere motivando ogni passaggio.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

- (i) (2 p.ti). La funzione f appartiene a $L^2(\mathbb{R})$?
- (ii) (2 p.ti). La funzione f appartiene a $L^1(\mathbb{R})$?
- (iii) (3 p.ti). Calcolare la trasformata di Fourier di f .
- (iv) (2 p.ti). Calcolare $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Rispondere alle domande motivando ogni passaggio.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.