

QUARTO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LS

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e delle Risorse

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

Esercizio 1 [10 p.ti]

Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Cauchy Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t^2 x^2, & (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [8 p.ti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy semilineare

$$(1) \quad \begin{cases} (u + 5) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 + 2, & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u = x^2, & \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1, x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Rispondere alle domande motivando ogni passaggio.

Esercizio 3 [4 punti]

Classificare la seguente equazione alle derivate parziali lineare di ordine due

$$3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Determinare le equazioni caratteristiche nel caso in cui sia iperbolica.

Esercizio 4 [8]

Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$(2) \quad \begin{cases} y' = -\frac{3x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Determinare per quali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema di Cauchy ha un'unica soluzione locale e quale regolarità ha. Risolvere il problema di Cauchy quando $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$. Tale soluzione è globale? Motivare ogni risposta.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.