1

$$(PC)\quad \begin{cases} y'(x) = \dfrac{5}{5+\sin(3x+5y)} \\[2ex] y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{5}{5+\sin(3x+5y)}$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi le condizioni per poter applicare il Teorema di Peano-Picard sono soddisfatte. Pertanto per ogni $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ esiste una ed una sola soluzione locale di (PC).

La funzione f è positiva e $\dfrac{5}{6} \le f(x,y) \le \dfrac{5}{4}$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Quindi è soddisfatta la condizione di crescita al più lineare di f. Pertanto le soluzioni di (PC) sono globali, cioè sono definite su $\mathbb{R}$.

La $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi le soluzioni sono in $C^\infty(\mathbb{R})$.

Le soluzioni saranno monotone strettamente crescenti se $y'>0$, ma $y' = \dfrac{5}{5+\sin(3x+5y)}$, quindi deve essere risolta $\dfrac{5}{5+\sin(3x+5y)} > 0$.

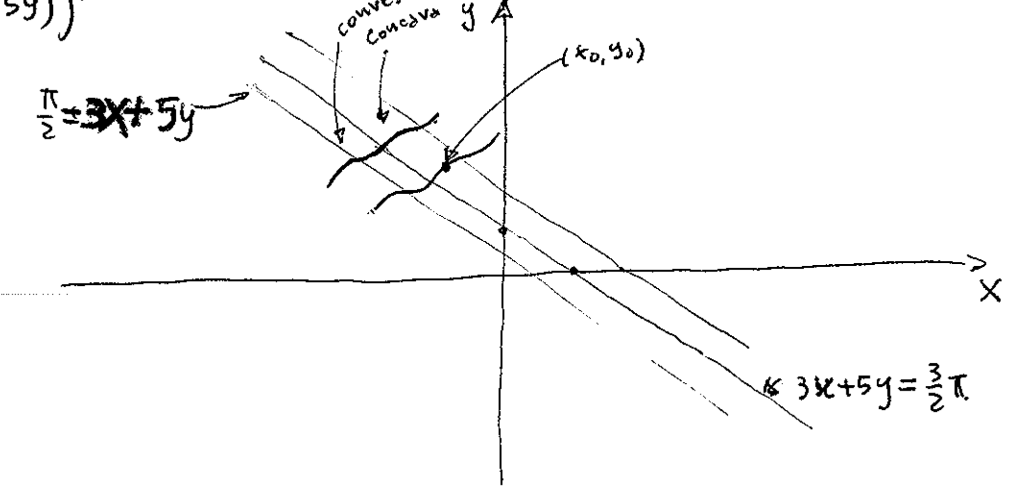
D'altra parte $\dfrac{5}{5+\sin(3x+5y)} \geq \dfrac{5}{6} > 0$. Pertanto le soluzioni sono strettamente crescenti su $\mathbb{R}$.

Per determinare in quali intervalli le soluzioni sono convesse calcoliamo la y''.

$$y'' = \left(\frac{5}{5+\sin(3x+5y)}\right)' = -\frac{5\cos(3x+5y)\cdot(3+5y')}{(5+\sin(3x+5y))^2}.$$

$$y''>0 \iff -\frac{5\cos(3x+5y)\cdot(3+5y')}{(5+\sin(3x+5y))^2} > 0 \iff \cos(3x+5y)<0,$$ perché

$$\frac{3+5y'}{(5+\sin(3x+5y))^2} > 0.$$ Quindi $y''>0 \iff \frac{\pi}{2}+2k\pi < 3x+5y < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.



Il polinomio di Taylor di ordine 2 della soluzione $(x_0, y_0) = (0, \frac{14}{5}\pi)$ è

$$T(x) = \frac{14}{5}\pi + x - \frac{2}{5}x^2.$$

#2 $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & (0,4) \\ y(0) = 0 \\ y'(4) = 0 \end{cases}$

$\gamma^2 + \lambda = 0$
- I $\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda|}$ se $\lambda < 0$
- II $\gamma_{1,2} = 0$ se $\lambda = 0$
- III $\gamma_{1,2} = \pm i\sqrt{|\lambda|}$ se $\lambda > 0$

I $y = c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x} \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \sqrt{|\lambda|}\left(c_1 e^{4\sqrt{|\lambda|}} - c_2 e^{-4\sqrt{|\lambda|}}\right) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ e^{4\sqrt{|\lambda|}} c_1 - e^{-4\sqrt{|\lambda|}} c_2 = 0 \end{cases}$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{4\sqrt{|\lambda|}} & -e^{-4\sqrt{|\lambda|}} \end{bmatrix} = -e^{-4\sqrt{|\lambda|}} - e^{4\sqrt{|\lambda|}} \neq 0$. Non ci sono autovalori per $\lambda < 0$.

II $y = c_1 + c_2 x \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow$ 0 è autovalore con soluzione banale.

III $y = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x) \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(\sqrt{|\lambda|}4) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \cos(\sqrt{|\lambda|}4) = 0$

$\sqrt{|\lambda|}4 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \longrightarrow \sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi \longrightarrow |\lambda| = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)^2.$

$-\lambda = \pi^2\left(\frac{1}{8} + \frac{k}{2}\right)^2$. Quindi $\lambda_k = -\pi^2\left(\frac{1+4k}{8}\right)^2$ sono autovalori con autofunzioni generate da $\left\{\sin\sqrt{|\lambda_k|}x\right\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{\sin\left(\frac{\pi + 4\pi k}{8}\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$

(ii) $\begin{cases} y'' + \lambda y = 5 & (0,4) \\ y(0) = 0 \\ y'(4) = 0 \end{cases}$

Se $\lambda < 0 \rightarrow LV_2 = \text{span}\left\{e^{\sqrt{|\lambda|}x}, e^{-\sqrt{|\lambda|}x}\right\} + \frac{5}{\lambda}$; se $\lambda = 0 \rightarrow LV_2 = \text{span}\{1, x\} + \frac{5}{2}x^2$

Se $\lambda > 0 \rightarrow LV_2 = \text{span}\left\{\cos(\sqrt{|\lambda|}x), \sin(\sqrt{|\lambda|}x)\right\} + \frac{5}{\lambda}$. Pertanto.

Se $\lambda < 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{5}{\lambda} = 0 \\ \sqrt{|\lambda|}\left(c_1 e^{4\sqrt{|\lambda|}} - c_2 e^{-4\sqrt{|\lambda|}}\right) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{5}{\lambda} \\ e^{4\sqrt{|\lambda|}} c_1 - e^{-4\sqrt{|\lambda|}} c_2 = 0 \end{cases}$ $\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{4\sqrt{|\lambda|}} & -e^{-4\sqrt{|\lambda|}} \end{bmatrix} \neq 0$

quindi la soluzione è unica.

Se $\lambda = 0 \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 5 + 20 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = -4 \end{matrix}$ la soluzione è unica.

Se $\lambda > 0 \longrightarrow \begin{cases} c_1 + \frac{5}{\lambda} = 0 \\ -c_1\sqrt{|\lambda|}\sin(\sqrt{|\lambda|}4) + c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(\sqrt{|\lambda|}4) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{5}{\lambda} \\ +\frac{5}{\lambda}\sqrt{|\lambda|}\sin(\sqrt{|\lambda|}4) + c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(\sqrt{|\lambda|}4) = 0 \end{cases}$

Pertanto $\begin{cases} c_1 = -\frac{5}{\lambda} \\ c_2 \cos(\sqrt{|\lambda|}4) = -\frac{5}{\lambda}\sin(\sqrt{|\lambda|}4) \end{cases}$. Quindi se $4\sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

il sistema non ha soluzioni. Mentre se $\lambda_k \neq \frac{1}{4^2}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

allora il problema ai limiti ha una sola soluzione.

#3 $\begin{cases} -11\, y\frac{\partial u}{\partial x} + 11x\frac{\partial u}{\partial y} = 3u & U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\} \\ u = x^2 + 2y^4 & \text{su } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \end{cases}$

Scriviamo il sistema delle caratteristiche per un'equazione lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial p_1} \\ \dot{y} = \frac{\partial F}{\partial p_2} \\ \dot{z} = \dot{x}p_1 + \dot{y}p_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -11y \\ \dot{y} = 11x \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$ Quindi

consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -11y \\ \dot{y} = 11x \\ \dot{z} = 3z \\ x(0) = s \\ y(0) = 0 \\ z(0) = s^2 \end{cases}$$

perché $s \mapsto (s,0)$ parametrizza la curva Γ e $g(x,y) = x^2 + 2y^4$ su Γ è $g(x,0)$ con $(x,0) \in \Gamma$. Pertanto $z(0) = s^2$. Conviene risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -11y \\ \dot{y} = 11x \\ x(0) = s \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e poi} \quad \begin{cases} \dot{z} = 3z \\ z(0) = s^2 \end{cases}$$

Quindi $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -11 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Gli autovalori sono dati da: $\det\begin{pmatrix} -\lambda & -11 \\ 11 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

da cui $\lambda^2 + 11^2 = 0$ e $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{11^2} = \pm i11$.

Ricaviamo gli autovettori sapendo che $(A-i11I)=\begin{bmatrix}-i11 & -11\\ 11 & -i11\end{bmatrix}$, quindi

$$(A-i11I)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{bmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to v_1-iv_2=0 \to (i,1)$$ genera l'autospazio. Quindi $\mathrm{Ker}(A-i11I)=\mathbb{R}(i,1)$.

Analogamente $(A+i11I)=\begin{bmatrix}i11 & -11\\ 11 & i11\end{bmatrix}$, quindi

$$(A+i11I)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \to \begin{bmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to v_1+iv_2=0 \to$$

$(-i,1)$ genera l'autospazio. Quindi $\mathrm{Ker}(A+i11I)=\mathbb{R}(-i,1)$.

Un sistema fondamentale è:

$$e^{i11t}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix},\quad e^{-i11t}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}.$$

Cerchiamo un sistema fondamentale reale considerando

$$\frac{1}{2}\left\{e^{i11t}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}+e^{-i11t}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}i\cos(11t)-\sin(11t)\\ \cos(11t)+i\sin(11t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-i\cos(11t)-\sin(11t)\\ \cos(11t)-i\sin(11t)\end{pmatrix}\right\}$$

e

$$\frac{1}{2i}\left\{e^{i11t}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}-e^{-i11t}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix}i\cos(11t)-\sin(11t)\\ \cos(11t)+i\sin(11t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-i\cos 11t-\sin(11t)\\ +\cos 11t-i\sin(11t)\end{pmatrix}\right\}$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\left\{e^{i11t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}+e^{-i11t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} \sin(11t) \\ \cos(11t) \end{pmatrix} \quad e$$

$$\frac{1}{2i}\left\{e^{i11t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}-e^{-i11t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix} \cos(11t) \\ \sin(11t) \end{pmatrix}.$$

Pertanto un sistema fondamentale reale è $\begin{bmatrix} -\sin(11t) & \cos 11t \\ \cos(11t) & \sin 11t \end{bmatrix}$. Infatti il determinante della matrice Wronskiana è diverso da zero. Pertanto una matrice fondamentale è

$$\phi(t)=\begin{bmatrix} -\sin(11t) & \cos(11t) \\ \cos(11t) & \sin(11t) \end{bmatrix}.$$

Risolviamo il problema di Cauchy per $x(0)=s, y(0)=0$.

$$\phi(0)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$c_2=s$ e $c_1=0$. Quindi la soluzione è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sin(11t) & \cos(11t) \\ \cos(11t) & \sin(11t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x=s\cos(11t) \\ y=s\sin(11t). \end{array}$$

Il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{z}=3z \\ z(0)=s^2 \end{cases}$ ha come soluzione

$z(t)=s^2e^{3t}$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy associato al sistema delle caratteristiche è:

$$\begin{cases} x(t)=s\cos(11t) \\ y(t)=s\sin(11t) \\ z(t)=s^2e^{3t} \end{cases}$$

Ricaviamo dalle prime due equazioni t e s in funzione di x e y

Infatti $x^2+y^2=s^2$ e $\frac{y}{x}=tg(11t)$ da cui $s=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ e

$11t=\arctan\frac{y}{x}$. Sostituendo in z otteniamo

$z=(x^2+y^2)\,e^{3\arctan\frac{y}{x}}$. Pertanto la soluzione cercata è

$u(x,y)=(x^2+y^2)\,e^{3\arctan\frac{y}{x}}$.

#4 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'=2y_1+3y_2 \\ y_2'=3y_1+4y_2 \\ y_1(0)=1 \\ y_2(0)=0 \end{cases}$$

Cerchiamo gli autovalori della matrice $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ risolvendo

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}=0 \iff (2-\lambda)(4-\lambda)-9=0 \longleftrightarrow \lambda^2-6\lambda+8-9=0$$

$\lambda^2-6\lambda-1=0 \longleftrightarrow \lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{9+1}=3\pm\sqrt{10}$. Cerchiamo gli autovettori

$$(A-(3+\sqrt{10})I)=\begin{bmatrix} -1-\sqrt{10}\,, & 3 \\ 3 & 1-\sqrt{10} \end{bmatrix}. \text{ Quindi } \begin{bmatrix} -1-\sqrt{10} & 3 \\ 3 & 1-\sqrt{10} \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1+\sqrt{10}}{3}]{} \text{Gauss}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1-\sqrt{10} \end{bmatrix} \longrightarrow 3v_1+(1-\sqrt{10})v_2=0 \longrightarrow \left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3},\ 1\right) \text{ è una base}$$

per $Ker(A-(3+\sqrt{10})I)$. Cioè $Ker(A-(3+\sqrt{10})I)=span\left\{\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3},1\right)\right\}$.

Analogamente. $(A-(3-\sqrt{10})I)=\begin{bmatrix} -1+\sqrt{10} & 3 \\ 3 & 1+\sqrt{10} \end{bmatrix}$ da cui segue

$$\xrightarrow[\frac{1-\sqrt{10}}{3}]{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} -1+\sqrt{10} & 3 \\ 3 & 1+\sqrt{10} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1+\sqrt{10} \end{bmatrix} \longrightarrow 3v_1+(1+\sqrt{10})v_2=0$$

Pertanto $Ker(A-(3-\sqrt{10})I)=span\left\{\left(-\frac{1+\sqrt{10}}{3},\ 1\right)\right\}$

Pertanto una matrice fondamentale è

$$\phi(t)=\left[e^{(3+\sqrt{10})t}\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \; e^{(3-\sqrt{10})t}\begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Risolviamo il problema di Cauchy risolvendo il sistema lineare di equazioni algebriche

$$\phi(0)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{quindi } c_1=\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\left(\frac{-1+\sqrt{10}}{3}+\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)}$$

e $c_2=\frac{3}{2}\,\frac{\det\begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{10}}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{10}}$. Pertanto

$c_1=\frac{3}{2\sqrt{10}}$ e $c_2=-\frac{3}{2\sqrt{10}}$ e la soluzione è

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\phi(t)\begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{2\sqrt{10}} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}e^{(3+\sqrt{10})t}+\frac{1+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}e^{(3-\sqrt{10})t} \\ \frac{3}{2\sqrt{10}}e^{(3+\sqrt{10})t}-\frac{3}{2\sqrt{10}}e^{(3-\sqrt{10})t} \end{bmatrix}.$$