①

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 3t\,h(x) & (0,1)\times(0,+\infty) \\ u(1,t)=0, \quad u(0,t)=0, & t>0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x\in[0,\tfrac{1}{2}) \\ -1+x & \text{se } x\in[\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

Risolviamo prima mediante separazione di variabili il problema omogeneo

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} \\ u(1,t)=0, \ u(0,t)=0 \end{cases}$$

Supponiamo che $u(x,t) = X(x)T(t)$. Allora $XT' = 2X''T$
Quindi separando le variabili

$\dfrac{X''}{X} = \dfrac{1}{2}\dfrac{T'}{T} = \lambda$. Inoltre $X(0)=0$ e $X(1)=0$, altrimenti otteniamo la sola soluzione nulla.

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \lambda \\ X(0)=0, \ X(1)=0 \end{cases}$$

L'integrale generale di $X''=\lambda X$

è : (i) se $\lambda>0$: $V_2 = \text{span}\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$

(ii) se $\lambda=0$ $V_2=\text{span}\{1, x\}$

(iii) se $\lambda<0$ $V_2 = \text{span}\{\sin(\sqrt{|\lambda|}x), \cos(\sqrt{|\lambda|}x)\}$

Nel caso (i) da $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ segue

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{cases}$$ e poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} \neq 0$

abbiamo la sola soluzione banale.

Nel caso (ii) $X(x) = c_1 + c_2 x$, quindi $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_2=0 \end{cases}$, pertanto otteniamo la sola soluzione banale.

Nel caso (iii) $c_1 \sin(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \cos(\sqrt{|\lambda|}x)$, quindi imponendo le condizioni al contorno otteniamo: (2)

$c_2 = 0$ e $c_1 \sin\sqrt{|\lambda|} + c_2 \cos\sqrt{|\lambda|} = 0$. Pertanto ricaviamo $c_1 \sin\sqrt{|\lambda|} = 0$ con $c_2 = 0$. Avremo soluzioni non banali se $\sin\sqrt{|\lambda|} = 0$, cioè se $\sqrt{|\lambda|} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ da cui $|\lambda| = k^2\pi^2$ e poiché $\lambda < 0$, risulta $\lambda = -k^2\pi^2$. Le autosoluzioni sono $\{\sin(k\pi x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Cerchiamo allora una soluzione del problema non omogeneo nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} T_k \sin(k\pi x)$. Quindi utilizziamo il sistema ortonormale $\{\sin(k\pi x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ per sviluppare $3t\,h(x)$.

Prolunghiamo h come funzione dispari su $[-1,0]$ ponendo

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h & \text{se } x \in [0,1] \\ -h(-x) & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

Quindi

$$\tilde{h}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x), \quad \text{con } b_k = 2\int_0^1 h(t)\sin(k\pi t)\,dt.$$

Pertanto, formalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_k' \sin(k\pi x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} T_k (\sin(k\pi x))'' + 3t\sum_{n=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$$

ovvero esplicitando le derivate otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_k' + 2k^2\pi^2 T_k - 3t\,b_k\right)\sin(k\pi x) = 0$$

Richiederemo allora che $\begin{cases} T_k'(t) + 2k^2\pi^2 T_k - 3t\,b_k = 0 \\ T_k(0) = 0, \end{cases}$

perché $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_k(0)\sin(k\pi x) = 0$ se $T_k(0) = 0$.

Sono problemi lineari non omogenei a coefficienti costanti (3)

Consideriamo l'equazione equazione omogenea $T'_k + 2k^2\pi^2 T_k = 0$

$T_k = C_k e^{-2k^2\pi^2 t}$. Cerchiamo per ogni k una soluzione dell'equazione omogenea $T'_k + 2k^2\pi^2 T_k = 3t\, b_k$.

Con il metodo per simpatia cerchiamo una soluzione nella forma $a + bt$. Quindi $b + 2k^2\pi^2(a+bt) = 3t\, b_k$ da cui segue: $2ak^2\pi^2 + b = 0$ e $2k^2\pi^2 b - 3b_k = 0$.
Risolvendo il sistema otteniamo $b = \dfrac{3b_k}{2k^2\pi^2}$ e

$a = -\dfrac{3b_k}{2k^2\pi^2} \cdot \dfrac{1}{2k^2\pi^2} = -\dfrac{3b_k}{4k^4\pi^4}$. Pertanto una soluzione dell'eq. non omogenea $T'_k + 2k^2\pi^2 T_k = 3t\, b_k$ è

$$-\frac{3b_k}{4k^4\pi^4} + \frac{3b_k}{2k^2\pi^2} t.$$

L'integrale generale di $T'_k + 2k^2\pi^2 T_k = 3t\, b_k$ è

$$C_k e^{-2k^2\pi^2 t} - \frac{3b_k}{4k^4\pi^4} + \frac{3b_k}{2k^2\pi^2} t.$$

Risolviamo il problema k-esimo di Cauchy imponendo che la soluzione sia nulla per $t=0$

$$C_k - \frac{3b_k}{4k^4\pi^4} = 0, \quad \text{cioè} \quad C_k = \frac{3b_k}{4k^4\pi^4}$$

Finalmente $T_k = \dfrac{3b_k}{4k^4\pi^4} e^{-2k^2\pi^2 t} + \dfrac{3b_k}{2k^2\pi^2} t - \dfrac{3b_k}{4k^4\pi^4}$

Quindi la soluzione ottenuta è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3b_k}{4k^4\pi^4} e^{-2k^2\pi^2 t} + \frac{3b_k}{2k^2\pi^2} t - \frac{3b_k}{4k^4\pi^4} \right) \sin(k\pi x).$$

I coefficienti b_k sono i coefficienti di Fourier associati a h, cioè $b_k = 2\int_0^1 h(s)\sin(k\pi s)\,ds$. Quindi calcoliamo

$$\int_0^1 h(s)\sin(k\pi s)\,ds = \int_0^{1/2} -s\sin(k\pi s)\,ds + \int_{1/2}^1 (-1+s)\sin(k\pi s)\,ds$$

$$= \left[s\frac{\cos(k\pi s)}{k\pi} \right]_{s=0}^{s=1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\cos(k\pi s)}{k\pi}\,ds + \left[-\frac{\cos(k\pi s)}{k\pi} \cdot (-1+s) \right]_{1/2}^{1} \rightarrow$$

$$+\int_{1/2}^{1}\frac{\cos(k\pi s)}{k\pi}ds=\cancel{\frac{1}{2k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}-\left[\frac{\sin(k\pi s)}{k^2\pi^2}\right]_{s=0}^{s=1/2}-\cancel{\frac{1}{2k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}+\left[\frac{\sin(k\pi s)}{k^2\pi^2}\right]_{s=1/2}^{s=1}$$

4

$$=-\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}-\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2\pi^2}=-\frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}\text{, pertanto}$$

$$b_k=-\frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}.$$

Verifichiamo se $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}\left(\frac{3e^{-2k^2\pi^2t}}{4k^4\pi^4}+\frac{3t}{2k^2\pi^2}-\frac{3}{4k^4\pi^4}\right)\sin(k\pi x)$

è continua. Studiamo la convergenza totale su $[0,1]\times[0,T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|\frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}\left(\frac{3e^{-2k^2\pi^2t}}{4k^4\pi^4}+\frac{3t}{2k^2\pi^2}-\frac{3}{4k^4\pi^4}\right)\sin(k\pi x)\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}\left(\frac{3}{4k^4\pi^4}+\frac{3T}{2k^2\pi^2}+\frac{3}{4k^4\pi^4}\right)\leq C(T)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}<+\infty$$

perché si tratta di una serie armonica generalizzata di esponente 4.

Quindi la serie $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^2\pi^2}\left(\frac{3e^{-2k^2\pi^2t}}{4k^4\pi^4}+\frac{3t}{2k^2\pi^2}-\frac{3}{4k^4\pi^4}\right)\sin(k\pi x)$

converge uniformemente su ogni insieme $[0,1]\times[0,T]$ e quindi sarà continua su tale insieme. Facendo tendere $T\to+\infty$ avremo che tale serie è continua su $[0,1]\times[0,+\infty)$.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = y \\ u(x,y) = 2y \qquad \text{su} \quad \Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=1,\ y\in\mathbb{R}\} \end{cases}$$ (5)

Parametrizziamo Γ $\quad \varphi: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^2$, $\varphi(s) = (1,s)$, mentre in $\mathbb{R}^3$ $\quad s \longmapsto (1, s, 2s)$.

Utilizziamo il metodo delle caratteristiche per risolvere il precedente problema di Cauchy semi-lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = y \end{cases} \qquad \text{con le condizioni iniziali}$$

$x(0) = 1$
$y(0) = s$
$z(0) = 2s.$

Risolviamo $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$ ottenendo $x(t,s) = e^t$

Risolviamo poi $\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = y \\ y(0) = s \\ z(0) = 2s \end{cases}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Si tratta di un problema di Cauchy a coefficienti costanti. Calcoliamo gli autovalori risolvendo $\det(A - \lambda I) = 0$. Pertanto $\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \iff$
$\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -1.$

$(A - I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, quindi $\operatorname{Ker}(A-I)$ si individua

risolvendo $\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_1 = 0 \end{cases}$ Il sistema è degenere con il metodo di Gauss $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ la matrice si (6)

trasforma in $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $v_1 = v_2$. Allora

$\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Span}\{(1,1)\}$. Analogamente

$A+I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pertanto $v_1 + v_2 = 0$, da cui segue

$v_2 = -v_1$. Pertanto $\mathrm{Ker}(A+I) = \mathrm{Span}\{(1,-1)\}$

Quindi $\phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}$ è una matrice fondamentale

Risolviamo ora il problema di Cauchy risolvendo il seguente

$\phi(0)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$

$$c_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} s & 1 \\ 2s & -1 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} \quad e \quad c_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & s \\ 1 & 2s \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$c_1 = \frac{-s-2s}{-1-1} \quad e \quad c_2 = \frac{2s-s}{-1-1}$$

$$c_1 = +\frac{3s}{2} \quad e \quad c_2 = -\frac{s}{2}$$

Otteniamo allora

$$y(t,s) = \frac{3}{2} s e^t - \frac{s}{2} e^{-t}$$

$$z(t,s) = \frac{3}{2} s e^t + \frac{s}{2} e^{-t}.$$

Pertanto la soluzione in forma parametrica è $\begin{cases} x(t,s) = e^t \\ y(t,s) = \frac{3}{2} s e^t - \frac{s}{2} e^{-t} \\ z(t,s) = \frac{3}{2} s e^t + \frac{s}{2} e^{-t} \end{cases}$

7

Per scrivere la soluzione in forma cartesiana osserviamo che

$$y = \frac{3}{2} s x - \frac{s}{2}\frac{1}{x}$$, da cui ricaviamo s;

$$s = \frac{y}{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}}$$. Pertanto

$$z = \frac{3}{2}\frac{y}{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}} x + \frac{1}{2}\frac{y}{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2x}}\frac{1}{x}$$, in particolare

$$z = \frac{3yx}{3x - \frac{1}{x}} + \frac{y}{(3x - \frac{1}{x})x}$$, cioè $\boxed{z = \frac{3yx^2}{3x^2-1} + \frac{y}{3x^2-1}}$.

Verifichiamo l'esistenza di punti caratteristici

$$J(t,s) = \det\begin{bmatrix} e^t & , 0 \\ \frac{3}{2}se^t + \frac{s}{2}e^{-t} & , \frac{3}{2}e^t - \frac{e^{-t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$J(0,s) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2}s + \frac{s}{2} & , \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2s & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Non ci sono punti caratteristici e il Problema di Cauchy ha sempre una soluzione locale di classe C^1.

/——/

Calcolare la Trasformata di Fourier di $g = \chi_{[-2,2]} * \chi_{[-3,3]}$

$g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Quindi trattandosi della convoluzione di due funzioni caratteristiche $\chi_{[-2,2]}, \chi_{[-3,3]} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F}\chi_{[-2,2]} \cdot \mathcal{F}\chi_{[-3,3]}$$

Sarà sufficiente calcolare

$$\mathcal{F}\chi_{[-a,a]}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\chi_{[-a,a]}(x)\,ds = \int_{-a}^{a} e^{-i\xi x}\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x} \right]_{x=-a}^{x=a} = -\frac{1}{i\xi} \left(e^{-i\xi a} - e^{i\xi a} \right) = \frac{2}{\xi} \frac{e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}}{2i}$$

8

$$= \frac{2}{\xi} \sin(\xi a).$$

Pertanto $\mathcal{F}g(\xi) = \frac{4}{\xi^2} \sin(2\xi) \sin 3\xi.$

Esercizio incluso nel testo del secondo appello

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -x - 2y \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (3+\lambda)(2+\lambda) + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 + 4 = 0 \qquad \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-40}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-5 + i\sqrt{15}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-5 - i\sqrt{15}}{2}.$$

$$\left(A - \frac{-5+i\sqrt{15}}{2} I\right) = \begin{bmatrix} -3 + \frac{5-i\sqrt{15}}{2}, & 4 \\ -1 & , -2 + \frac{5-i\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1-i\sqrt{15}}{2}, & 4 \\ -1, & \frac{1-i\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1+i\sqrt{15}}{2}} \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ -1, & \frac{1-i\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}; \qquad \text{quindi } -v_1 + \frac{1-i\sqrt{15}}{2} v_2 = 0.$$

$$\operatorname{Span}\left\{ \left(\frac{1-i\sqrt{15}}{2}, 1 \right) \right\} = \operatorname{Ker}\left(A - \frac{-5+i\sqrt{15}}{2} I \right). \text{ Analogamente}$$

$$\left(A + \frac{5+i\sqrt{15}}{2} I\right) = \begin{bmatrix} -3 + \frac{5+i\sqrt{15}}{2}, & 4 \\ -1 & , -2 + \frac{5+i\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1+i\sqrt{15}}{2}, & 4 \\ -1, & \frac{1+i\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1, & \frac{1+i\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}, \text{ quindi } \quad -v_1+\frac{1+i\sqrt{15}}{2}v_2=0$$

$$\text{span}\left\{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}, \; 1\right)\right\} = \text{Ker}\left(A+\frac{5+i\sqrt{15}}{2}\right).$$

Pertanto

$$H_1 = e^{-\frac{5}{2}t} e^{i\frac{\sqrt{15}}{2}t}\begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{15}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-\frac{5}{2}}\begin{pmatrix} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)\frac{1-i\sqrt{15}}{2} \\ \left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\frac{5}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+i\left(\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{15}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \\ \cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

analogamente

$$H_2 = e^{-\frac{5}{2}t} e^{-i\frac{\sqrt{15}}{2}t}\begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{15}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-\frac{5}{2}x}\begin{pmatrix} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right)\frac{1+i\sqrt{15}}{2} \\ \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\frac{5}{2}t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+i\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-i\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{H_1+H_2}{2} = e^{-\frac{5}{2}t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\frac{H_1-H_2}{2i} = e^{-\frac{5}{2}t}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Quindi una matrice fondamentale è

$$\mathcal{M}(t)=\begin{bmatrix} e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right), & e^{-\frac{5}{2}t}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) \\ e^{-\frac{5}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right), & e^{-\frac{5}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

Ora se φ è una soluzione, qualunque, del sistema, allora

$$\varphi(t)=\mathcal{M}(t)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

per una qualche scelta di costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Pertanto $$\|\varphi\| = \left\| e^{-\frac{5}{2}t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t, & \frac{\sqrt{15}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right), & \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right\|$$

$$= e^{-\frac{5}{2}t}\underbrace{\left\|\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{15}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right), & \frac{\sqrt{15}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right), & \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\right\|} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Perché la norma di questo vettore è limitata

Ciò significa che la funzione nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione stabile (asintoticamente stabile)