Primo appello di Complementi di Analisi Matematica LS e di Complementi di Analisi Matematica LM del 12/12/2008

CdLS Ambiente e Territorio, CdLM Chimica e di Processo A.A.08/09
(Comm. Prof. F. Ferrari)

Esercizio 1 [7 punti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema semilineare di Cauchy

$$\begin{cases} u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3u\frac{\partial u}{\partial y} = 3, \\ u = H \text{ su } \Gamma \subset \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1}$$

dove $H : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 e Γ è una curva regolare parametrizzata da $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rispondere, motivando accuratamente ogni affermazione, alle seguenti domande.

(a) Scrivere una soluzione locale del problema in forma parametrica indicando h(s)=H(f(s),g(s)). (b) Se $f(s) = s$, $g = 0$ e $h(s) = 2$ scrivere in forma cartesiana una soluzione locale del problema di Cauchy assegnato. (c) Nelle ipotesi (b), esiste sempre una soluzione locale del problema di Cauchy? (d) Nelle ipotesi (b), esistono punti caratteristici per Γ?

Esercizio 2 [8 punti]

Sia assegnato il seguente problema di Cauchy con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = \frac{4x+\alpha^2 y^3}{1+\alpha^2x^2+121y^2} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Il candidato risponda alle seguenti domande avendo cura di giustificare ogni passaggio.

(i) Per quali dati iniziali si ha esistenza e unicità locale delle soluzioni?
(ii) Qual è la regolarità delle soluzioni del problema di Cauchy assegnato?
(iii) Si ha esistenza globale della soluzione del problema di Cauchy? Determinare in quali intervalli le soluzioni sono monotone crescenti.
(iv) Qual è il polinomio di Taylor di ordine 2 della soluzione del problema di Cauchy in un intorno di 0 ottenuta per $x_0 = 0$ e $y_0 = \alpha$?
(v) Se $\alpha = 0$, calcolare la soluzione per $x_0 = 1$ e $y_0 = 11$.

Esercizio 3 [10 p.ti] Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ (0,1)\times(0,1) \\ u(x,0) = 0, \ u(x,1) = 0, \ u(0,y) = 0, \\ u(1,y) = g(y), \end{cases}$$

dove $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ e

$$g(y) = \begin{cases} y, \text{ se } y \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1-y \text{ se } y \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esercizio 4 [5 punti] Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \ (-\infty,\infty)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \sin(x), \\ u_t(x,0) = \chi_{(-2,2)}, \end{cases}$$

calcolando esplicitamente la soluzione.