

**APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA**  
**11/09/2009**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Chimica e di processo (A.A.08/09) e  
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio (A.A.08/09)  
(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

**Esercizio 1** [10 p.ti]

Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t(x^2 + 1), & (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(1, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x^2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

**Esercizio 2** [8 p.ti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy lineare

$$(1) \quad \begin{cases} 5y \frac{\partial u}{\partial x} - 3x \frac{\partial u}{\partial y} = 7u, & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u = y^2, & \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 1, y \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Rispondere alle domande motivando ogni passaggio.

**Esercizio 3** [6 punti]

Sia  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  così definite  $f(x) = \chi_{[-3,3]} | x^2 - 1 |$  e  $g = \chi_{[-2,2]}$ . Calcolare esplicitamente la trasformata di Fourier di  $f * g$  ( leggi  $f$  convoluto  $g$  ).

Si ricorda inoltre che  $\chi_{[-\alpha, \alpha]}$  denota la funzione caratteristica dell'insieme  $[-\alpha, \alpha]$ ,  $\alpha > 0$ .

**Esercizio 4** [6]

Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$(2) \quad \begin{cases} y' = -\frac{3x+2y}{-2x+4y}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

determinare per quali  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  esiste un'unica soluzione locale e quale regolarità ha. Risolvere inoltre il problema di Cauchy nel caso in cui  $x_0 = 2$  e  $y_0 = 2$ .

**N.B.** Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.