APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.................................Nome..............................Mat......................CdL.............

Esercizio 1 [10 p.ti]

Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Cauchy Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t x, \ \ (0,1)\times(0,1) \\ u(x,0) = x^2 \ \ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0, \ \ t > 0 \\ u(1,t) = 0, \ \ t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 2 [8 p.ti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy semilineare

$$(1) \qquad \begin{cases} 2y\frac{\partial u}{\partial x} - 2x\frac{\partial u}{\partial y} = 7u, \ \ \text{in } \mathbb{R}^2 \\ u = x^2, \ \ \Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \ \ y = 2, \ \ x\in\mathbb{R}\} \end{cases}$$

e scrivere in forma cartesiana la soluzione in un intorno del punto $(1,2)$.

Rispondere alle domande motivando ogni passaggio.

Esercizio 3 [4 punti]

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ con $a < b$ numeri reali. In particolare calcolare la trasformata di Fourier di $\chi_{|[1,2]} * \chi_{|[-2,-1]}$.

Esercizio 4 [8]

Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$(2) \qquad \begin{cases} y' = -\frac{x^3+3y^2x}{3x^2y+y^3}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Determinare per quali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema di Cauchy ha un'unica soluzione locale e quale regolarità ha. Risolvere il problema di Cauchy quando $x_0 = 0$ e $y_0 = 2$.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.