Sistema autonomo in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) . \end{cases}$$

I punti critici sono dati dalle soluzioni di $\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 . \end{cases}$

In un intorno di un punto regolare (non critico) consideriamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)} .$$

L'integrale generale (l'insieme delle soluzioni, non si tratta in generale di uno spazio vettoriale) di tale equazione permette di determinare un integrale primo del sistema.

Esempio (Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}}{x} = a - by \\ \frac{\dot{y}}{y} = -c + dx \end{cases} \qquad \text{con } a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo allora $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \frac{-c+dx}{a-by}$. Si tratta di una EDO risolvibile per separazione di variabili

$$\int^{y} \frac{a-bs}{s} ds = \int^{x} \frac{-c+d\tau}{\tau} d\tau .$$

Da cui segue

$$a \log|y| - by = -c \log|x| + dx + K$$

Quindi un integrale primo del sistema di Lotka-Volterra è:

$$E(x,y) = -a \log y - c \log x + by + dx.$$

Il p.to critico del sistema $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ è un minimo assoluto per E.
Infatti $\nabla E\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = (0,0)$ e $HE(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{bmatrix}$. Quindi
E è convessa perché $HE(x,y)$ è definita negativa per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Gli insiemi di livello $E_s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : E(x,y) = s\}$ sono orbite del sistema nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^2$ in $x, y$.

Poiché $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ è un pto di minimo assoluto e $E\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) = -a \log \frac{a}{b} - c \log \frac{c}{d} + a + c$, se $s > -a \log \frac{a}{b} - c \log \frac{c}{d} + a + c$ allora $E_s \neq \phi$ e $E_s$ è un'orbita. A causa della convessità della funzione $E$ queste orbite sono dei cicli. Se $T$ è il periodo di uno di questi cicli risulta $x(0) = x(T)$ e $y(0) = y(T)$. Pertanto, integrando ambo i membri del sistema di Lotka-Volterra si ottiene

$$\begin{cases} 0 = \displaystyle\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}\, dt = \int_0^T (a - by)\, dt \implies \frac{a}{b} = \frac{1}{T}\int_0^T y\, dt \\[2ex] 0 = \displaystyle\int_0^T \frac{\dot{y}}{y}\, dt = \int_0^T (-c + dx)\, dt \implies \frac{c}{d} = \frac{1}{T}\int_0^T x\, dt \end{cases}$$

Quindi se aumenta uno dei coefficienti che determina il tasso di crescita delle prede (e.g. diminuisce la pesca quindi $a$ diventa $a+\varepsilon$.) allora si riduce il tasso di diminuzione dei predatori che da $c$ passerà a $c-\eta$ lasciando inalterati $b$ e $d$. Pertanto

$$\#\underset{\text{in media}}{\text{predatori}} = \frac{a+\varepsilon}{b} > \frac{a}{b}, \quad \#\underset{\text{in media}}{\text{prede}} = \frac{c-\eta}{d} < \frac{c}{d}.$$

spiega la diminuzione delle prede (il pesce) nonostante si fosse interrotta l'attività di pesca.