Terzo appello scritto di Complementi di Analisi Matematica LS/LM (e Seconda Prova Parziale) del 24/01/2009

CdLS Ambiente e Territorio, CdLM in Chimica e di processo (Comm. Prof. F. Ferrari)

Nome.................. Cognome.................. Mat............ CdLS/CdLM.........

---

(1) [10 punti] Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema fortemente nonlineare di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 = 3, \\ u(x,y) = y, \ \text{su } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, \ y \in \mathbb{R}\}. \end{cases} \tag{1}$$

Rispondere, motivando accuratamente ogni affermazione, alle seguenti domande. (a). Scrivere la soluzione del problema in forma parametrica. (b). Scrivere la soluzione in forma cartesiana.

---

(2) [5 punti] Sia assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{4x^3 + 5y}{5x + y - 1} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Rispondere alle seguenti domande motivando ogni risposta. (a). Per quali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema di Cauchy ha soluzione. (b). Qual è la regolarità delle soluzioni del problema di Cauchy. (c). Risolvere il problema di Cauchy quando $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$.

---

(3)

[11 p.ti] Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ (0,1) \times (0, \infty) \\ u(1,t) = 0, \ u(0,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = e^{-\frac{5}{6}x}h, \ x \in [0,1] \end{cases}$$

dove $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ e

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \ \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}(x - \dfrac{1}{2}), \ \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La soluzione trovata è continua ? Motivare la risposta.

(4)

[4 punti] Siano $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, così definite: $f(x) = x^2\chi_{[-3,3]}$ e $g(x) = x^4\chi_{[-8,8]}$. Calcolare la trasformata di Fourier di $f * g$.

N.B. La seconda prova parziale non conteneva l'esercizio (2). Inoltre il primo esercizio era valutato 6 punti il terzo 9 punti mentre il quarto era valutato 3 punti per un totale di 18 punti.