(1)

$$\begin{cases} u^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} + 3u \dfrac{\partial u}{\partial y} = 3 \\ u = H \quad \text{su } \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

(1)

Il sistema delle curve caratteristiche è:

$$\begin{cases} \dot{x} = z^2 \\ \dot{y} = 3z \\ \dot{z} = 3 \end{cases} \quad \text{con le condizioni iniziali} \quad \begin{cases} x(0) = f(s) \\ y(0) = g(s) \\ z(0) = h(s) \end{cases}$$

Quindi si tratta di un sistema autonomo non lineare.

$\dot{z} = 3 \longrightarrow z(t) = 3t + c$, con condizione iniziale $z(0) = h(s)$, pertanto $z(t) = 3t + h(s)$.

Sostituendo otteniamo $\begin{cases} \dot{x} = (3t + h(s))^2 \\ \dot{y} = 3(3t + h(s)) \end{cases}$ con $\begin{matrix} x(0) = f(s) \\ y(0) = g(s). \end{matrix}$

Quindi $x(t) = \frac{1}{9}(3t + h(s))^3 + A$ e $y(t) = \frac{1}{2}(3t + h(s))^2 + B$ con A e B costanti da determinare.

In particolare $x(0) = \frac{1}{9} h^3(s) + A = f(s)$ e $y(0) = \frac{1}{2} h^2(s) + B = g(s)$ da cui $A = f(s) - \frac{1}{9} h^3(s)$ e $B = g(s) - \frac{1}{2} h^2(s)$

Pertanto la soluzione in forma parametrica è:

$$\begin{cases} x(t,s) = \frac{1}{9}(3t + h(s))^3 + f(s) - \frac{1}{9} h^3(s) \\ y(t,s) = \frac{1}{2}(3t + h(s))^2 + g(s) - \frac{1}{2} h^2(s) \\ z(t,s) = 3t + h(s). \end{cases}$$

Se $f(s) = s$, $g(s) = 0$ e $h(s) = 2$, allora

$$\begin{cases} x(t,s) = \frac{1}{9}(3t+2)^3 + s - \frac{8}{9} \\ y(t,s) = \frac{1}{2}(3t+2)^2 - 2 \\ z(t,s) = 3t+2 \end{cases}$$

②

è la soluzione in forma parametrica quando $(f, g, h) = (s, 0, 2)$ $s \in \mathbb{R}$.

Verifichiamo l'invertibilità dell'applicazione

$$(t,s) \longmapsto (x, y).$$

calcolando

$$\det J\begin{pmatrix} x & y \\ t & s \end{pmatrix} = \det \begin{bmatrix} (3t+2)^2 & , & 1 \\ 3(3t+2) & , & 0 \end{bmatrix} = -3(3t+2).$$

Poiché $3t+2 = 0 \iff t = -\frac{2}{3}$, possiamo allora affermare che in un intorno di $(0,0)$ l'applicazione è invertibile.
Quindi esiste una soluzione locale del problema di Cauchy.
In particolare, ricavando t dalla seconda, abbiamo

$$3t+2 = \pm\sqrt{2(2+y)}, \quad \text{cioè} \quad 3t = -2 \pm \sqrt{2(2+y)},$$

da cui per $t \geq 0$ $\quad t = -2 + \sqrt{2(2+y)}$. Sostituendo otteniamo

$$z = -4 + \sqrt{2(2+y)},$$ espressione cartesiana della soluzione

Non ci sono punti caratteristici perché già sappiamo che

$$\det J\begin{pmatrix} x & y \\ t, & s \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{per } t \geq 0.$$

Es. 2 $\begin{cases} y' = \dfrac{4x+\alpha^2 y^3}{1+\alpha^2 x^2+121 y^2} \\ y(x_0) = y_0 . \end{cases}$

$\dfrac{4x+\alpha^2 y^3}{1+\alpha^2 x^2+121 y^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, perché quoziente di polinomi.

In particolare il denominatore, $1+\alpha^2 x^2+121 y^2$ è sempre diverso da zero, perché somma di quantità positive o non negative.
Le condizioni del teorema di Peano-Picard sono soddisfatte, quindi esiste ed è unica localmente la soluzione del problema di Cauchy per ogni $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.
La regolarità delle soluzioni è ancora C^∞ perché la funzione $f(x,y) = \dfrac{4x+\alpha^2 y^3}{1+\alpha^2 x^2+121 y^2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

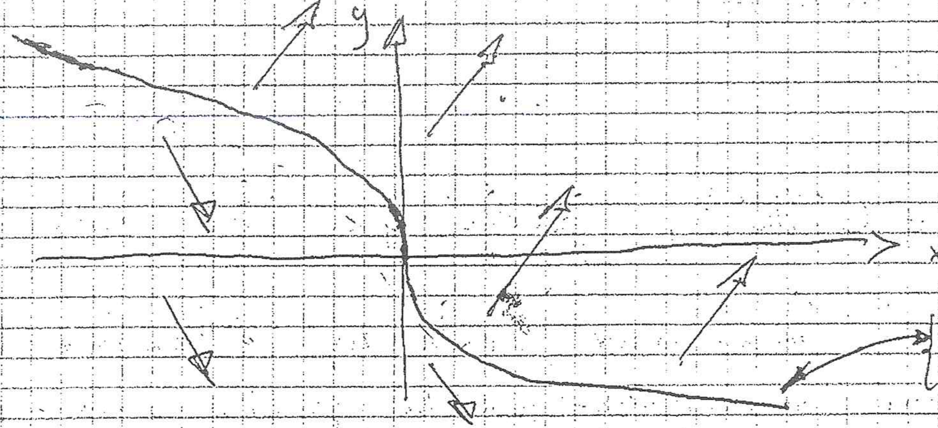
Per provare l'esistenza globale delle soluzioni verifichiamo se f, al più crescita lineare.

$$|f(x,y)| = \left| \frac{4x+\alpha^2 y^3}{1+\alpha^2 x^2+121 y^2} \right| \underset{\text{disug. triangolare}}{\leq} \frac{|4x|}{|1+\alpha^2 x^2+121 y^2|} + \frac{\alpha^2 |y^3|}{1+\alpha^2 x^2+121 y^2}$$

$$\leq \frac{|4x|}{1+\alpha^2 x^2} + \frac{\alpha^2 \, |y|^3}{121\, y^2} \leq C_1 + \frac{\alpha^2}{121} |y|$$

La funzione $\dfrac{|4x|}{1+\alpha^2 x^2}$ è limitata in $[-1,1]$, perché $\dfrac{|4x|}{1+\alpha^2 x^2}$ è continua in $[-1,1]$ e quindi per il teorema di Weierstrass esistono max e min su $[-1,1]$. Mentre $\dfrac{|4x|}{1+\alpha^2 x^2}$ è limitata su $[1,+\infty) \cup (-\infty,-1]$ perché $\dfrac{4|x|}{1+\alpha^2 x^2} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$.
Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è globale, cioè, in questo caso, è definita su $\mathbb{R}$.

$$y' \geq 0 \iff \frac{4x+\alpha^2 y^3}{1+\alpha^2 x^2+121y^2} \geq 0 \iff 4x+\alpha^2 y^3 \geq 0$$



Se x e y sono positive la disuguaglianza precedente è soddisfatta

Se $x<0$ allora $y^3 \geq -\frac{4}{\alpha^2}x > 0$, quindi se

$$y = \sqrt[3]{-\frac{4}{\alpha^2}x} = \sqrt[3]{\frac{4}{\alpha^2}}\sqrt[3]{-x}$$

Se $x>0$ e $y<0$, allora $\alpha^2 y^3 \geq -4x \iff \alpha^2(-y)^3 \leq 4x$

quindi $-y \leq \sqrt[3]{\frac{4}{\alpha^2}x}$

Il polinomio di Taylor di ordine 2 per $x_0=0$ e $y_0=\alpha$ è dato conoscendo $y'(0) = \frac{\alpha^5}{1+121\alpha^2}$ e

$$y'' = \frac{(4+3\alpha^2 y^2 y')(1+\alpha^2x^2+121y^2) - (2\alpha^2 x + 242 y y')(4x+\alpha^2 y^3)}{(1+\alpha^2x^2+121y^2)^2}$$

$$y''(0) = \frac{\left(4+3\alpha^4 \frac{\alpha^5}{1+121\alpha^2}\right)(1+121\alpha^2) - \frac{242\alpha^6}{1+121\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^5}{(1+121\alpha^2)^3}}{(1+121\alpha^2)^2} = \beta$$

quindi

$$y(x) = \alpha + \frac{\alpha^5}{1+121\alpha^2}x + \beta x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Se $\alpha=0$, $x_0=1$ e $y_0=11$ il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x}{1+121y^2} \\ y(1) = 11 \end{cases}$$

Risolvendolo mediante separazione di variabili otteniamo

$$\int_{11}^{y} (1+121\, s^2)\, ds = \int_{1}^{x} 4t\, dt \; ; \quad \left[s + \frac{121}{3} s^3 \right]_{s=11}^{s=y} = 2(x^2-1)$$

$$y + \frac{121}{3} y^3 - 11 - \frac{11^5}{3} = 2x^2 - 2.$$

Es 3

$$\begin{cases} u_{xx} + 7\, u_{yy} = u_x & (0,1)\times(0,1) \\ u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = g(y) \end{cases}$$

con $\quad g(y) = \begin{cases} y, & y \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1-y, & y \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Cerchiamo una soluzione mediante separazione di variabili: $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

$$X''Y + 7XY'' = X'$$

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0, \quad u(x,1) = X(x)Y(1) = 0$$
$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(1) = 0, \quad X(0) = 0$$

altrimenti avremmo la sola soluzione banale.

$$\Downarrow$$

$$\frac{X''}{X} + 7\frac{Y''}{Y} = \frac{X'}{X}$$

$$\Big\downarrow \text{ Separazione di variabili}$$

$$\frac{X''}{X} - \frac{X'}{X} = -\frac{7Y''}{Y} = \lambda \quad \text{costante da determinare}$$

$$\begin{cases} -\frac{7y''}{y} = \lambda \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 7y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{cases} \qquad 7\gamma^2+\lambda=0 \quad \text{è}$$

l'equazione caratteristica, quindi:

(i) $\lambda>0 \to \gamma^2=-\frac{\lambda}{7} \longrightarrow \gamma_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{\lambda}{7}} \longrightarrow$

$$V_2 = \text{span}\left\{ \cos\left(\sqrt{\tfrac{\lambda}{7}}\, y\right), \sin\left(\sqrt{\tfrac{\lambda}{7}}\, y\right) \right\}$$

Pertanto imponiamo le condizioni iniziali a

$$c_1 \cos\left(\sqrt{\tfrac{\lambda}{7}}\, y\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\tfrac{\lambda}{7}}\, y\right)$$

ottenendo

$c_1+0=0$, $c_1\cos\sqrt{\frac{\lambda}{7}} + c_2 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{7}}=0$, da cui segue $c_2\sin\sqrt{\frac{\lambda}{7}}=0$. Quindi $\sqrt{\frac{\lambda}{7}}=k\pi \longrightarrow \frac{\lambda}{7}=k^2\pi^2$

Le autosoluzioni sono quindi $\{\sin(k\pi x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\lambda_k=7k^2\pi^2$ $k\in\mathbb{Z}$ gli autovalori

(ii) Se $\lambda=0$ $V_2=\text{span}\{1, y\}$, pertanto $c_1+c_2 y$ è l'integrale generale. Imponendo le condizioni iniziali $c_1=0$ e $c_1+c_2=0$ segue $c_1=0$ e $c_2=0$

Pertanto non ci sono autosoluzioni.

(iii) Se $\lambda<0$, allora $\gamma^2=-\frac{\lambda}{7}$, ma $-\frac{\lambda}{7}>0$ e quindi

$$\gamma_{1,2}=\pm\sqrt{-\tfrac{\lambda}{7}}.$$

Pertanto l'integrale generale è:

$$c_1 e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}y} + c_2 e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}y}$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo: $c_1+c_2=0$ e $c_1 e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}} + c_2 e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}}=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}} & e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}} \end{bmatrix}$$ è la matrice associata al sistema.

Il determinante è $e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}} - e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{7}}}$. Non si annulla mai per $\lambda<0$, quindi non abbiamo autosoluzioni.

Le soluzioni trovate sono $X_k \sin(k\pi y)$ con X_k da determinare e tali che

$$(P_k)\quad \begin{cases} \dfrac{X''}{X} - \dfrac{X'}{X} = \lambda_k = 7k^2\pi^2 \\ X(0)=0 \end{cases}$$ ⑦

Dobbiamo pertanto risolvere il problema

$$\begin{cases} X''-X'-7k^2\pi^2 X=0 \\ X(0)=0 \end{cases}, \quad k\in\mathbb{N}$$

Scriviamo l'equazione caratteristica. Le soluzioni sono

$$\gamma^2-\gamma-7k^2\pi^2=0 \qquad \gamma_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+28k^2\pi^2}}{2}$$

Quindi

$$c_1 e^{\gamma_1 x}+c_2 e^{\gamma_2 x}$$

è l'integrale generale. D'altra parte anche le soluzioni $\dfrac{e^{\gamma_1 x}+e^{\gamma_2 x}}{2}$ e $\dfrac{e^{\gamma_1 x}-e^{\gamma_2 x}}{2}$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni.

In particolare

$$\frac{e^{\gamma_1 x}+e^{\gamma_2 x}}{2}=e^{\frac{1}{2}x}\left(\frac{e^{\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x}+e^{-\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x}}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}x}\cosh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\right.$$

e

$$\frac{e^{\gamma_1 x}-e^{\gamma_2 x}}{2}=e^{\frac{1}{2}x}\,\frac{e^{\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x}-e^{-\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x}}{2}=e^{\frac{1}{2}x}\sinh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\right.$$

Pertanto

$$V_2=\operatorname{span}\left\{e^{\frac{1}{2}x}\cosh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x\right),\ e^{\frac{1}{2}x}\sinh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x\right)\right\}$$

Imponendo la condizione $X(0)=0$ a

$$c_1 e^{1/2x}\cosh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x\right)+c_2 e^{\frac{1}{2}x}\sinh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x\right)$$

ottemiamo:

$c_1 = 0$

Pertanto le soluzioni del problema (P_K) sono multipli di

$$e^{\frac{1}{2}x} \sinh\sqrt{1+28K^2\pi^2}\,x.$$

Le soluzioni u_K sono $u_K = C_K e^{\frac{1}{2}x} \sinh\sqrt{1+28K^2\pi^2}\,x \cdot \sin(K\pi y)$

Richiederemo quindi che per $x=1$.

$$\sum_{K=1}^{\infty} u_K^{(1,y)} = g(y)$$

cioè

$$\sum_{K=1}^{\infty} c_K e^{\frac{1}{2}} \sinh\sqrt{1+28K^2\pi^2} \cdot \sin(K\pi y) = g(y)$$

Ciò sarà possibile sviluppando in serie di Fourier di seni g. A tal fine prolunghiamo g come funzione g_1 dispari sull'intervallo $[-1,1]$ ponendo $g(y) = -g(-y)$ se $y \in [-1,$

Pertanto.

$$g \sim \sum_{K=1}^{\infty} b_K \sin(K\pi y) \qquad \text{con} \quad b_K = 2\int_0^1 g(s)\sin(K\pi s)\,ds$$

calcoliamo esplicitamente i coefficienti

$$2\int_0^1 g(s)\sin(K\pi s)\,ds = 2\left(\int_0^{1/2} s\sin(K\pi s)\,ds + \int_{1/2}^1 (1-s)\sin(K\pi s)\,ds\right)$$

$$= 2\left\{\left[-\frac{\cos(K\pi s)}{K\pi}s\right]_{s=0}^{s=1/2} + \int_0^{1/2}\frac{\cos(K\pi s)}{K\pi}ds + \left[-\frac{(1-s)\cos(K\pi s)}{K\pi}\right]_{s=1/2}^{s=1}\right.$$

$$\left. - \int_{1/2}^1 \frac{\cos(K\pi s)}{K\pi}ds\right\} = 2\left\{\cancel{-\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{K\pi}{2}\right)}{K\pi}} + \left[\frac{\sin(K\pi s)}{(K\pi)^2}\right]_{s=0}^{s=1/2} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{K\pi}{2}\right)}{K\pi}}\right.$$

$$\left. - \left[\frac{\sin(K\pi s)}{(K\pi)^2}\right]_{s=1/2}^{s=1}\right\}$$

$$= 2\left\{ \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)^2} + \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)^2} \right\} = \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Richiederemo quindi che per ogni $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$c_k e^{1/2} \sinh\sqrt{1+28k^2\pi^2} = \frac{4}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

cioè

$$c_k = \frac{4e^{-1/2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)^2\sinh\sqrt{1+28k^2\pi^2}}$$

Quindi la funzione che potrebbe essere soluzione in senso classico del nostro problema di Dirichlet è:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4e^{-1/2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{(k\pi)^2\sinh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\right)} e^{1/2 x}\sinh\left(\sqrt{1+28k^2\pi^2}\,x\right)\sin(k\pi y)$$

Esercizio 4

Osserviamo che la soluzione soddisfa l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{in } (-\infty,+\infty)\times(0,+\infty)$$

Utilizzando la formula di D'Alambert otteniamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(x+\frac{1}{2}t\right) + \sin\left(x-\frac{1}{2}t\right)\right) + \frac{1}{1}\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x\cos\tfrac{1}{2}t + \cancel{\cos x\sin\tfrac{1}{2}t} + \sin x\cos\tfrac{1}{2}t - \cancel{\cos x\sin\tfrac{1}{2}t}\right) + \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = \sin x\cos\tfrac{1}{2}t + \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds$$

in particolare $(t>0)$

(1) se $x+\frac{1}{2}t<-2$, allora $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = 0.$

(2) se $x-\frac{1}{2}t<-2<x+\frac{1}{2}t<2$, allora $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = \int_{-2}^{x+1/2\,t} ds = x+\frac{1}{2}t+$

(3) se $x-\frac{1}{2}t>-2$ e $2>x+\frac{1}{2}t$, allora $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+1/2\,t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = t$

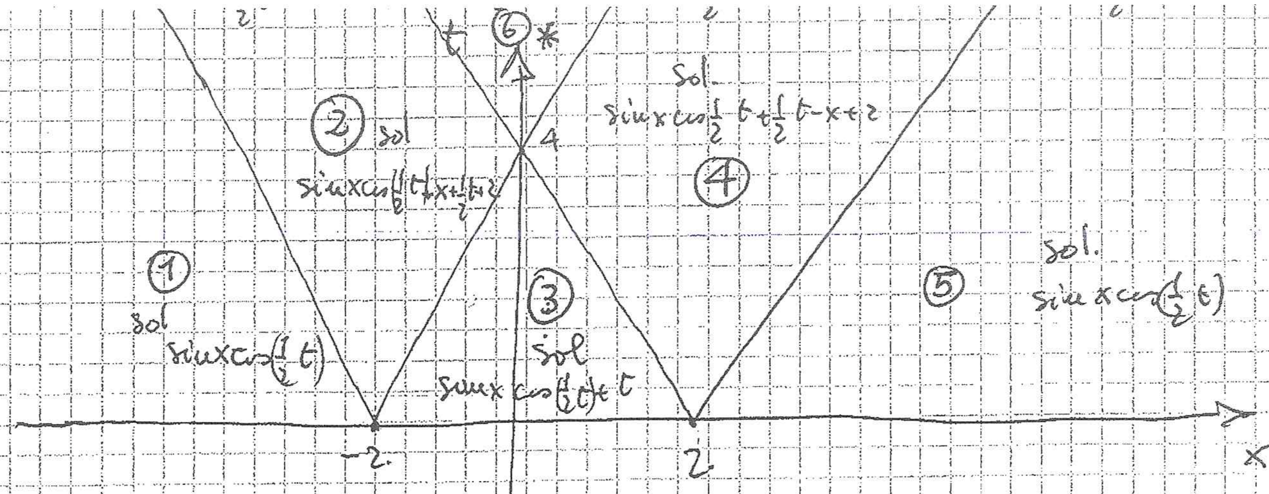
(4) se $-2<x-\frac{1}{2}t<2<x+\frac{1}{2}t$, allora $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+1/2\,t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = \int_{x-\frac{1}{2}t}^{2} ds = 2-x+\frac{1}{2}t$

(5) se $x-\frac{1}{2}t>2$, allora $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = 0$

(6) se $x-\frac{1}{2}t<-2$ e $2<x+\frac{1}{2}t$, allora $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} \chi_{(-2,2)}(s)\,ds = \int_{-2}^{2} ds = 4$

Riassumendo:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos\frac{1}{2}t, & x+\frac{1}{2}t<-2 \\ \sin x\cos\frac{1}{2}t + x+\frac{1}{2}t+2, & x-\frac{1}{2}t<-2<x+\frac{1}{2}t<2 \\ \sin x\cos\frac{1}{2}t + t, & -2<x-\frac{1}{2}t \ \text{e} \ x+\frac{1}{2}t<2 \\ \sin x\cos\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t - x + 2, & -2<x-\frac{1}{2}t<2<x+\frac{1}{2}t \\ \sin x\cos\frac{1}{2}t, & x-\frac{1}{2}t>2 \\ \sin x\cos\frac{1}{2}t + 4, & x-\frac{1}{2}t<-2 \end{cases}$$



in (*) 6 vale $\sin x\cos\left(\frac{1}{2}t\right)+4$

N.B. ovviamente non si tratta di una soluzione classica, in quanto $\chi_{(-2,2)}$ non è di classe C^1 su $\mathbb{R}$.