Correzione della Seconda Prova Parziale e del Primo Appello scritto di Analisi Matematica L-A

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica e Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio. Anno Accademico 2006/2007, Prof. F. Ferrari

Esercizio 1

Determinare gli intervalli di monotonia e i punti estremanti di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sinh(\mid x - 6 \mid (x^2 + 3x)).$$

La funzione f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$, perché si tratta di una funzione che è la composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R} \setminus \{6\}$. Mentre è continua su tutto $\mathbb{R}$, perché si tratta di una funzione che è la composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

Calcoliamo in $\mathbb{R} \setminus \{6\}$ la derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cosh(\mid x - 6 \mid (x^2 + 3x))\Big((x^2 + 3x)\mathrm{sgn}(x - 6) + \mid x - 6 \mid (2x + 3)\Big) \\ &= \cosh(\mid x - 6 \mid (x^2 + 3x))(3x^2 - 6x - 18)\mathrm{sgn}(x - 6). \end{aligned} \tag{1}$$

Per determinare gli intervalli in cui la funzione è strettamente monotona risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{6\} \end{cases} \tag{2}$$

Poiché $\cosh(\mid x - 6 \mid (x^2 + 3x)) > 0$, ciò equivale a risolvere

$$\begin{cases} (3x^2 - 6x - 18)\mathrm{sgn}(x - 6) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}. \end{cases} \tag{3}$$

Da cui segue che:
f è monotona strettamente crescente in $[1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}]$ e
f è monotona strettamente crescente in $[6, \infty)$; mentre:
f è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 1 - \sqrt{7}]$ e
f è monotona strettamente decrescente in $[1 + \sqrt{7}, 6]$. Quindi $1 - \sqrt{7}$ è un punto di minimo assoluto per f, $1 + \sqrt{7}$ è un punto di massimo locale per f e 6 è un punto di minimo locale per f.

Esercizio 2

Calcolare

$$\int_0^6 \frac{3x + 6}{x^2 + 13x + 42} dx.$$

$x^2 + 13x + 42 = 0$ ha discriminante $\Delta = 1$. Quindi $x^2 + 13x + 42$ si può fattorizzare come

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7).$$

Applichiamo il metodo dei fratti semplici ricercando due costanti A, B reali tali che

$$\frac{3x + 6}{x^2 + 13x + 42} = \frac{A}{x + 6} + \frac{B}{x + 7} = \frac{(A + B)x + 7A + 6B}{(x + 6)(x + 7)}.$$

Pertanto dal principio d'identità dei polinomi la precedente equazione è un'identità se e solo se A, B sono soluzioni di

$$\begin{cases} 7A + 6B = 6 \\ A + B = 3. \end{cases} \tag{4}$$

Risolvendo il sistema si ricava $A = -12$ e $B = 15$. Quindi

$$\int_0^6 \frac{3x+6}{x^2+13x+42}dx = -12\int_0^6 \frac{1}{x+6}dx + 15\int_0^6 \frac{1}{x+7}dx$$
$$= [-12\log \mid x+6 \mid +15\log \mid x+7 \mid]_{x=0}^{x=6} = \log\big((\frac{13}{7})^{15}(\frac{1}{2})^{12}\big).$$

Esercizio 3
Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(2x)+\cosh(2x)-2)\tan(2x+7)}{\sin^2(7x)-49x^2}.$$

Poiché

$$\sin^2(7x) \sim (7x - \frac{7^3}{3!}x^3 + o(x^4))^2 \sim (49x^2 - \frac{7^4}{3}x^4 + o(x^5))$$

per $x \to 0$. Il numeratore è una funzione continua che si annulla in 0. Il denominatore è una funzione continua che si annulla in 0. Quindi abbiamo una forma di indecisione del tipo zero su zero. Utilizziamo la formula di Taylor.

Il denominatore ha il seguente comportamento:

$$(\sin^2(7x) - 49x^2) \sim -\frac{7^4}{3}x^4,$$

per $x \to 0$. Per quanto riguarda il numeratore

$$\tan(2x+7) \sim \tan(7),$$

per $x \to 0$ (la funzione $\tan(2x+7)$ è continua in 0, e $\tan(7) \neq 0$, pertanto questo fattore non determina variazioni dell'ordine di infinitesimo del numeratore.) Mentre, per quanto stabilito in merito al comportamento del denominatore, svilupperemo in 0 fino all'ordine 4 le funzioni rimanenti.

$$(\cos(2x)+\cosh(2x)-2) \sim (1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) + 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) - 2)$$

per $x \to 0$. Quindi

$$(\cos(2x)+\cosh(2x)-2) \sim \frac{4}{3}x^4$$

per $x \to 0$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(2x)+\cosh(2x)-2)\tan(2x+7)}{\sin^2(7x)-49x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4}{-\frac{7^4}{3}x^4} \lim_{x\to 0} \tan(2x+7) = -\frac{4}{7^4}\tan 7.$$

Esercizio 4
Calcolare

$$\int_{-2}^{5/2} (x+2)\sinh(2x-5)dx.$$

Integriamo per parti

$$\int_{-2}^{5/2} (x+2)\sinh(2x-5)dx = [(x+2)\frac{\cosh(2x-5)}{2}]_{x=-2}^{x=5/2} - \int_{-2}^{5/2} \frac{\cosh(2x-5)}{2}dx$$
$$= [(x+2)\frac{\cosh(2x-5)}{2} - \frac{\sinh(2x-5)}{4}]_{x=-2}^{x=5/2} \tag{5}$$
$$= \frac{9}{4} + \frac{\sinh(-9)}{4} = \frac{9}{4} - \frac{\sinh 9}{4}.$$

Esercizio 5 (facoltativo, non valido ai fini del superamento della prova)
Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\frac{x-2}{x-3}.$$

Il dominio naturale è detreminato richiedendo che $x-3\neq 0$. Quindi $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\arctan\frac{2}{3}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\frac{\pi}{2}.$$

Quindi esiste un asintoto orizzontale di equazione $y=\arctan\frac{2}{3}$. Per derminare gli intervalli di monotonia calcoliamo la derivata prima nel dominio di definizione. Infatti la funzione è derivabile infinite volte nel dominio perché composizione di funzioni derivabili infinite volte in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2+(x-3)^2}.$$

Quindi risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \end{cases} \tag{6}$$

otteniamo che:
f è monotona decrescente in $(-\infty,3)$ e
f è monotona decrescente in $(3,+\infty)$.

Per stabilire dove la funzione è convessa, calcoliamo la derivata seconda di f. Pertanto per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$:

$$f''(x)=\frac{4x-10}{\left((x-2)^2+(x-3)^2\right)^2}.$$

Quindi risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f''(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{3\} \end{cases} \tag{7}$$

otteniamo che:
f è convessa in $(\frac{5}{2},3)$ e
f è convessa in $(3,+\infty)$.

Inoltre la funzione sarà concava in $(-\infty,\frac{5}{2})$, mentre $\frac{5}{2}$ è un punto di flesso.

La prova scritta del primo appello era composta da 7 esercizi. I primi quattro esercizi appena proposti ne erano parte integrante (mentre non ne faceva parte l'esercizio facoltativo, il numero 5). Ecco gli altri tre.

Esercizio 6

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^6-6^n+3n^2+6}{6^{n+1}-n^{12}+n^2+3}.$$

Poiché

$$(n^6-6^n+3n^2+6)\sim -6^n,$$

per $n\to+\infty$ e

$$(6^{n+1}-n^{12}+n^2+3)\sim 6^{n+1}$$

per $n\to+\infty$, se ne evince che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^6-6^n+3n^2+6}{6^{n+1}-n^{12}+n^2+3}=-\frac{1}{6}.$$

Esercizio 7

Posto $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{x+\sin(3x)}{4+\cos(3x)}$, calcolare $k'(\frac{\pi}{2})$.

La funzione k è $C^\infty(\mathbb{R})$, perché composizione e quoaziente di funzioni C^∞. Quindi, in particolare, sarà derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \frac{(1+3\cos(3x))(4+\cos(3x)) + 3(x+\sin(3x))\sin(3x)}{(4+\cos(3x))^2}.$$

Pertanto

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{(1+3\cos(3\frac{\pi}{2}))(4+\cos(3\frac{\pi}{2})) + 3(\frac{\pi}{2}+\sin(3\frac{\pi}{2}))\sin(3\frac{\pi}{2})}{(4+\cos(3\frac{\pi}{2}))^2} = \frac{4-3(\frac{\pi}{2}-1)}{16} = \frac{7-3\frac{\pi}{2}}{16}$$

Esercizio 8

Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $g'(0) = 7$ e $g'(e^7) = \frac{1}{2}$ e poniamo

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = g(e^{2x+7}).$$

Quanto vale $h'(0)$?

Trattandosi della composizione di due funzioni derivabili, possiamo calcolare la derivata di h.

$$h'(x) = 2g'(e^{2x+7})e^{2x+7}.$$

Quindi $h'(0) = 2g'(e^7)e^7$. D'altra parte sappiamo per ipotesi che $g'(e^7) = \frac{1}{2}$, quindi

$$h'(0) = e^7.$$