$T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ è lineare $\Longleftrightarrow$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (y_1, \dots, y_m)$

le m funzioni $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ sono nulle o polinomiali omogenee di 1° grado

$$y_i = a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n$$

$$(a_1^i \cdots a_n^i) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

COR - Ogni trasf. lin. da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ è data dal prodotto di una matrice $A \in M_{m,n}$ per $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$V \quad \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata di V

$$V \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n$$

$$\underline{v} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ componenti di v rispetto a $\mathcal{B}$

$$v =_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

endomorfismo di V: tr. lin. da V a V

automorfismo di V: isomorfismo da V a V.

$V \quad \dim V = n$ $\qquad$ $V' \quad \dim V' = m$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ $\qquad$ $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$

$T : V \longrightarrow V'$ lineare

Costruisco $A \in M_{m,n}$:

scompongo $T(e_1)$ risp. a $\mathcal{B}'$:

$$T(e_1) = a_1^1 f_1 + a_1^2 f_2 + \dots + a_1^m f_m$$

$$\dots$$

$$T(e_n) = a_n^1 f_1 + a_n^2 f_2 + \dots + a_n^m f_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

TEOR - Sia $v \equiv_{\mathcal{B}} (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$,

Sia $T(v) \equiv_{\mathcal{B}'} (\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_m)$

Allora

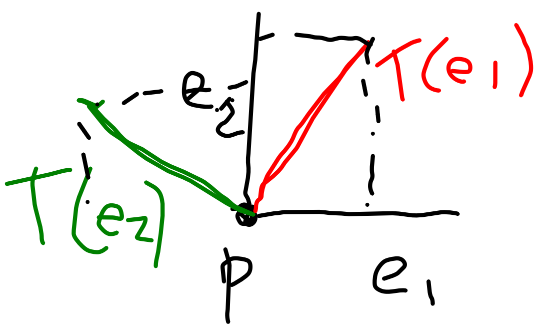
$$\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \vdots \\ \overline{y}_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$$

$V = \{$ segmenti del piano con un estremo in $P \}$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ $\quad T : V \longrightarrow V$

$\qquad v \longmapsto v$ ruotato di $60°$

Rappresentare T risp. a $\mathcal{B}$



$$T(e_1) = \frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2$$

$$T(e_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2$$

$$T(e_1) =_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$T(e_2) =_{\mathcal{B}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$V = \mathbb{R}_3[t] = \{$ polinomi in t, a coeff. reali, di gr $\leq 3 \}$

$\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$

$$T : V \longrightarrow V$$
$$p(t) \longmapsto p'(t)$$

$T(1) = 0 \equiv_{\mathcal{B}} (0,0,0,0)$

$T(t) = 1 \equiv_{\mathcal{B}} (1,0,0,0)$

$T(t^2) = 2t \equiv_{\mathcal{B}} (0,2,0,0)$

$T(t^3) = 3t^2 \equiv_{\mathcal{B}} (0,0,3,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROP - La composizione di trasf. lin. è rappresentata dal prodotto delle rispettive matrici nello stesso ordine

PROP - La somma di due trasf. lin. è rappresentata dalla somma delle matrici corrispondenti.

PROP - Il prodotto di una trasf. lin. per uno scalare α è rappresentata da α per la matrice corrispondente

$V = \mathbb{R}_3[t] \qquad \mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$

$$T : V \longrightarrow V$$
$$p(t) \longmapsto 5 \cdot p(t) - 2p'(t) + 7p''(t)$$

La matrice corrispondente a questa T è

$$B = 5 \cdot I_4 - 2 \cdot A + 7 \cdot A^2$$

TEOR (fondamentale delle tr. lin.)

V con base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$, W sullo stesso campo. Qualunque siano $w_1, \dots, w_n \in W$ $\exists!$ la trasf. lin. T tale che

$$T(e_1) = w_1$$
$$T(e_2) = w_2$$
$$\vdots$$
$$T(e_n) = w_n$$

V di dim 2
$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ base ord.

V' di dim 3
$\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$ base ord.

Dati $e_1 \equiv_{\mathcal{B}} (1, 3)$ $\quad f_1 \equiv_{\mathcal{B}'} (1, 0, 5)$

$e_2 \equiv_{\mathcal{B}} (2, -4)$ $\quad f_2 \equiv_{\mathcal{B}'} (-6, 1, 0)$

Verificare che $\overline{\mathcal{B}} = (e_1, e_2)$ è una base di V

Scrivere la matrice A che rappresenta, rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la trasf. lin.

$$T : V \to V' \text{ tale che}$$

$$T(e_1) = f_1$$
$$T(e_2) = f_2$$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad |X| = -4-6 = -10 \neq 0$

$\Rightarrow (e_1, e_2)$ lin. indip. $\Rightarrow \overline{B} = (e_1, e_2)$ base.

b) Cerco $A \in M_{3,2}$ tale che, con $Y = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

sia

$$A \cdot X = Y$$

$$A \cdot \cancel{X \cdot X^{-1}} = Y \cdot X^{-1}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -3 & 1 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$$

PROP - $T: \underset{\dim = n}{V} \to \underset{\dim = m}{W}$ rappresentata da $A \in M_{m,n}$. Allora

$\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{rk} A$

$\dim \operatorname{Ker} T = n - \operatorname{rk} A$

T è iniettiva $\iff \operatorname{rk} A = n$

T è suriettiva $\iff \operatorname{rk} A = m$

Rappresentazioni di un sottosp. vett. U di V:

parametrica: vedo U come $\operatorname{Im} S$ per un'opportuna tr. lin. S

cartesiana: vedo U come $\operatorname{Ker} T$ per un'opportuna tr. lin. T

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^s \arrow[r, "S"] & V \arrow[r, "T"] & \mathbb{K}^r \\
U = \operatorname{Im} S & U \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & U = \operatorname{Ker} T
\end{tikzcd}$$

V con una fissata base ordinata $\mathcal{B}$
Ho un insieme $S \subset V$, voglio rappr. cartesiana e parametrica del sottosp. $U = \mathcal{L}(X)$
Le voglio "minime", cioè col minimo numero possibile di eq. e di parametri.

---

1) Metto in colonna in una matrice B le n-ple di componenti dei vettori di S.
Con Kronecker isolo la sottomatrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_s^1 \\ - & \cdots & - \\ a_1^n & \cdots & a_s^n \end{pmatrix}$$

formata da un sottoinsieme massimo di colonne lin. ind.

2par) La rappresentazione è:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}$$

2cart) In 1) avevo isolato un minore M di ordine s con $|M| \neq 0$, tale che ogni suo orlato avesse det = 0. Formulo matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & a_1^1 & \cdots & a_s^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n & a_1^n & \cdots & a_s^n \end{pmatrix}$$

Impongo ai suoi minori orlati di M di avere det = 0

$\mathbb{R}^4$ con base naturale

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Scrivere rappr. par. e cart. minime di $U = L(S)$

$$B = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ \boxed{\begin{matrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\ 1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad |M| = -1 \neq 0$$

$$|O_1| = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = 0$$

$$|O_2| = \begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow rk\,B = \dim U = 2$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

par. $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

$U = \operatorname{Im} S$

$$\begin{pmatrix}x_1 & 1 & 2\\ x_2 & 2 & 1\\ x_3 & \boxed{\begin{matrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{matrix}}\\ x_4 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix}x_1 & 1 & 2\\ x_3 & 1 & -2\\ x_4 & 0 & -1\end{vmatrix} = 0 \\[2mm] \begin{vmatrix}x_2 & 2 & 1\\ x_3 & 1 & -2\\ x_4 & 0 & -1\end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & -4\\ 0 & -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

cart. $U = \ker T$