Passaggio parametrico $\longleftrightarrow$ cartesiana

1) par $\longrightarrow$ cart. Ho una rappr. parametrica del sottosp. $U \subseteq V$. Le colonne della matrice rappresentano un insieme di generatori di U. Esegua la costruzione della rappr. cart.

2) cart $\longrightarrow$ par. Risolvo il sistema.

$U \subset \mathbb{R}^3$ $\qquad U : \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 3\alpha \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Impongo

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & 0 \\ z & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & 0 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -3x + 3y - 6z = 0$$

$W \subset \mathbb{R}^5$ $\qquad W : \begin{cases} x - y + u + 2v = 0 \\ x + z - u = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -y = -\alpha - \beta - 2\gamma \\ z = -\alpha + \beta \\ x = \alpha \\ u = \beta \\ v = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta + 2\gamma \\ z = -\alpha + \beta \\ u = \beta \\ v = \gamma \end{cases}$$

$$W = \{ (\alpha, \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + \beta, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^5 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$$

$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice <u>bilineare</u> se

$\forall u, v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

1) $\varphi(u+v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$

2) $\varphi(u, v+w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$

3) $\varphi(\alpha u, v) = \alpha \varphi(u, v) = \varphi(u, \alpha v)$

La forma bilineare φ si dice <u>simmetrica</u> se

$\forall u, v \in V \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

$q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice forma quadratica se $\exists$ forma bilineare $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ tale che $\forall v \in V$

$$* \quad q(v) = \varphi(v, v)$$

PROP- Se q è quadratica, $\exists!$ forma bilineare simmetrica tale che valga $*$, detta sua forma polare

PROP – $V = \mathbb{K}^n$ $\quad \varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \longmapsto \varphi\big((x_i), (y_i)\big)$$

è bilineare $\iff$ è $\begin{cases} \to \text{o nulla} \\ \to \text{o } \left(\begin{array}{l} \text{polinomiale omogenea di 1° grado nelle } x_i \text{ e} \\ \\ \text{e polinomiale omogenea di 1° gr. nelle } y_i \end{array} \right) \end{cases}$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

SI $\varphi((x, y, z), (x', y', z')) = 5xy' - 7yx' + 4zz'$

NO $5x - 7yx' + 4zz'$

NO $5x^2 - 7yx' + 4zz'$

PROP – $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è quadratica
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto q(x_i)$

$\Longleftrightarrow$ è o nulla

o polinomiale omogenea di 2° grado
nelle x_i

$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $q(x, y, z) = -2xy + 4z^2$ SÌ

NO $-2x + 4z^2$

NO $-2 + 4z^2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\quad q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ quadratica

è detta definita positiva se
negativa

$\forall v \in V - \{\bar{0}_V\}$ $\quad q(v) > 0$
$<$

Si dice indefinita se non è né def. pos né def. neg.

Qesti attributi si estendono alla forma polare.

Esempi

1) $V=\mathbb{R}^3$ $\quad q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ è def. pos.

$\varphi((x,y,z),(x',y',z'))=xx'+yy'+zz'$ " "

2) $V=\mathbb{R}^3$ $\quad q(x,y,z)=-x^2-3y^2-5z^2$ è def. neg.

$\varphi((x,y,z),(x',y',z'))=-xx'-3yy'-5zz'$

Prodotto scalare su uno sp. vett. $(\mathbb{R}, V, +, \cdot)$

è qualunque forma bilineare simmetrica definita positiva su V.

---

1) $V = \mathbb{R}^n$ $\quad \langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) \longmapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

prodotto scalare naturale su $\mathbb{R}^n$

2) $V = \mathbb{R}^2 \quad \langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' + xy' + yx' + 3yy'$

3) $V = \{$ segmenti del piano con un estremo in $P\}$

$\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cdot \cos($angolo compreso$)$

4) $V = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
g

$(x+y)^2 + 2y^2$
$x^2 + 2xy + 3y^2$

Spazio vettoriale euclideo: $(V, \langle , \rangle)$

sp. vett. $(\mathbb{R}, V, +, \cdot)$

un prodotto scalare su V

Spazio vettoriale euclideo standard:

$$(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{nat})$$

prodotto scalare naturale

Dato uno sp. vett. eucl. $(V, \langle , \rangle)$

<u>norma euclidea</u> su $(V, \langle , \rangle)$:

$$\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

<u>versore</u>: vettore di norma 1

u si dice <u>ortogonale</u> a v se $\langle u, v \rangle = 0$

$X \subset V$ si dice <u>ortogonale</u> se $\forall u, v \in X, u \neq v,$
$\langle u, v \rangle = 0$ e $\overline{0}_V \notin X$

X si dice <u>ortonormale</u> se è ortogonale e tutti i suoi elementi sono versori.

Base ortonormale di V: una base di V che, come insieme, è ortonormale

---

$(V, \langle , \rangle)$, $(W, \langle , \rangle)$ sp. vett. eucl.

$T : V \to W$ lineare si dice ortogonale se $\forall\, v, v' \in V$ $\langle T(v), T(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice ortogonale se

$${}^tA = A^{-1}$$

PROP Se $A \in M_n$ è ortogonale, le sue righe formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Idem per le sue colonne.

PROP $(V, \langle , \rangle)$ sp. vett. eucl. di dim $= n$

$\mathcal{B}$ sua base ortonormale. Allora $\Phi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo ortogonale da $(V, \langle , \rangle)$ a $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{nat})$

$(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$ $\langle (x,y),(x',y') \rangle = xx' + xy' + yx' + 3yy'$

$B_{nat} = ((1,0),(0,1))$ è ortonormale?

NO: $\langle (0,1),(0,1) \rangle = 3 \neq 1$

$\langle (1,0),(0,1) \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1 \neq 0$

PROP - $(V, \langle , \rangle)$ $(W, \langle , \rangle)$

$\mathcal{B}$ sua base ortonormale $\mathcal{B}'$ sua base ortonormale

$T : V \longrightarrow W$ lineare ortogonale.

Allora la matrice A che rappresenta T rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è ortogonale.

V sp. v. eucl. $X \subset V$

L'insieme ortogonale di X è

$$^{\perp}X = \{ v \in V \mid \forall w \in X \ \langle v, w \rangle = 0 \}$$

Se come insieme prendo un sottospazio vettoriale U di V, allora $^{\perp}U$ viene detto complemento ortogonale di U

PROP - Data U s. sp. vett. di V, $\forall v \in V$

$\exists!\, v_U \in U\ \exists!\, v'_U \in {}^{\perp}U$ tali che

$$v = v_U + v'_U$$

---

v_U viene detto proiezione ortogonale di v su U.

PROP

$X \neq \emptyset$ qualsiasi. Allora:

1) ${}^{\perp}X$ è un sottospazio vettoriale di V
2) ${}^{\perp}({}^{\perp}X) = \mathcal{L}(X)$

PROP - $\dim V = n$ U sottosp. v. di V. Allora:

1) ${}^{\perp}({}^{\perp}U) = U$
2) $U + {}^{\perp}U = V$
3) $\dim U = h \iff \dim {}^{\perp}U = n - h$

Dim del fatto che ${}^{\perp}X$ è s.spvett.

$X = \{v_1, \dots, v_r\}$

${}^{\perp}X = \{v \in V \mid \langle v, v_1\rangle = 0, \dots, \langle v, v_r\rangle = 0\}$

Siano $u, w \in {}^{\perp}X$; mi chiedo: $u + w \overset{?}{\in} {}^{\perp}X$

$\langle u+w, v_1\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle w, v_1\rangle = 0 + 0 = 0$

$\vdots$

$\langle u+w, v_r\rangle = \langle u, v_r\rangle + \langle w, v_r\rangle = 0 + 0 = 0$

Sì

idem per $\alpha u \in {}^{\perp}X$

TEOR. - (V, sottosp. vett. eucl. $\mathcal{B}$ base ortonormale. U sottosp. vett. di dim h. Una sua rappresentazione cartesiana minima, scritta rispetto a $\mathcal{B}$:

$$U: \begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n = 0 \\ \cdots \\ a_1^{n-h} x_1 + \cdots + a_n^{n-h} x_n = 0 \end{cases}$$

Allora i vettori

$$v_1 \equiv_{\mathcal{B}} (a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, v_{n-h} \equiv_{\mathcal{B}} (a_1^{n-h}, \ldots, a_n^{n-h})$$

formano una base (in generale NON ortogonale) di $\perp U$