$$(V=\mathbb{R}^2, \langle\,,\rangle) \qquad \langle (x,y),(x',y')\rangle = xx'+xy'+yx'+3yy'$$

$$\downarrow \Phi_{\overline{\mathcal{B}}}$$

$$(\mathbb{R}^2, \langle\,,\rangle)$$

naturale

$$\overline{\mathcal{B}} = \left((1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)\right)$$

$$\left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)\right\rangle =$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\frac{1}{\sqrt2} + \frac{1}{\sqrt2}\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right) + 3\cdot\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{\sqrt2} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\left\langle (1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)\right\rangle =$$

$$= 1\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)} + 1\,\cancel{\frac{1}{\sqrt2}} + 0\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right) + 0\,\frac{1}{\sqrt2} = 0$$

$v=(1,2)$ $w=(3,4)$ $\langle v,w\rangle = 1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 3+3\cdot 2\cdot 4=37$

Scompongo v e w rispetto a $\overline{\mathcal{B}}$:

$v=(1,2)=a(1,0)+b\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} a-\frac{1}{\sqrt{2}}b=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}b=2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1+2=3 \\ b=2\sqrt{2} \end{cases}$

$v\equiv_{\overline{\mathcal{B}}}(3,2\sqrt{2})$

$w=(3,4)=c(1,0)+d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases} c-\frac{1}{\sqrt{2}}d=3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}d=4 \end{cases}$ $\begin{cases} c=3+4=7 \\ d=4\sqrt{2} \end{cases}$

$w\equiv_{\overline{\mathcal{B}}}(7,4\sqrt{2})$

$\langle(3,2\sqrt{2}),(7,4\sqrt{2})\rangle = 3\cdot 7+2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=$

naturale

$=21+16=37$

(Sp. affine: terna $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \pi)$

$\vec{\mathcal{A}}$ sp. vett. $\quad \mathcal{A}$ insieme

$\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \vec{\mathcal{A}}$ che gode di certe proprietà)

Per noi: spazio affine è una terna $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \tau)$ $\quad \tau : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \vec{\mathcal{A}}$

vettori liberi $\quad$ sp. vett. V $\quad$ punti

$(v, w) \longmapsto w - v$

due punti $\mapsto$ differenza, che chiamerò vettore libero $\vec{vw}$

Sottospazio affine, $(\vec{\mathcal{A}}', \mathcal{A}', \tau')$ che sia spazio affine, con $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ $\quad \vec{\mathcal{A}}'$ sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{A}}$

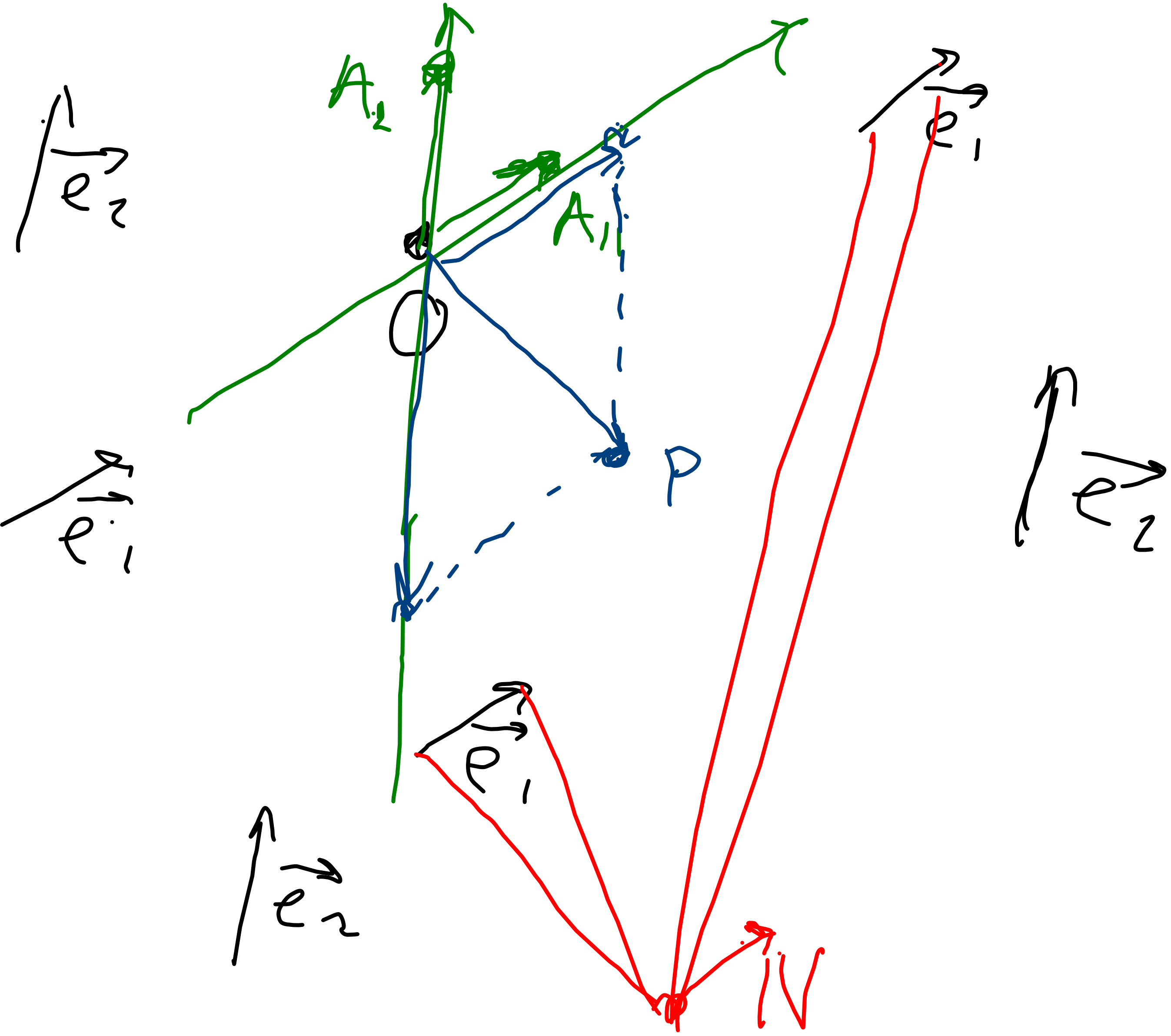
Punti $A_0, A_1, \dots, A_h$ si dicono affinemente dipendenti se $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_h}$ sono linearmente dipendenti.

Riferimento affine: $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\mathcal{B}})$

un punto, detto origine del riferimento

base ordinata di $\overrightarrow{\mathcal{R}}$

Coordinate affini di un punto P: le componenti del vettore libero $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\overrightarrow{\mathcal{B}}$



$$\vec{OP} = 1{,}2\,\vec{OA_1} - 2{,}5\cdot\vec{OA_2} =$$

$$= 1{,}2\cdot\vec{e_1} - 2{,}5\cdot\vec{e_2}$$

$$\vec{OP} \equiv_{\vec{\mathcal{R}}} (1{,}2,\ 2{,}5)$$

$$P \equiv_{\mathcal{R}} (1{,}2,\ 2{,}5)$$

TEOR - Data un rif. aff. $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$

dati punti $P \equiv_{\mathcal{R}} (a_1, \dots, a_n)$, $Q \equiv_{\mathcal{R}} (b_1, \dots, b_n)$

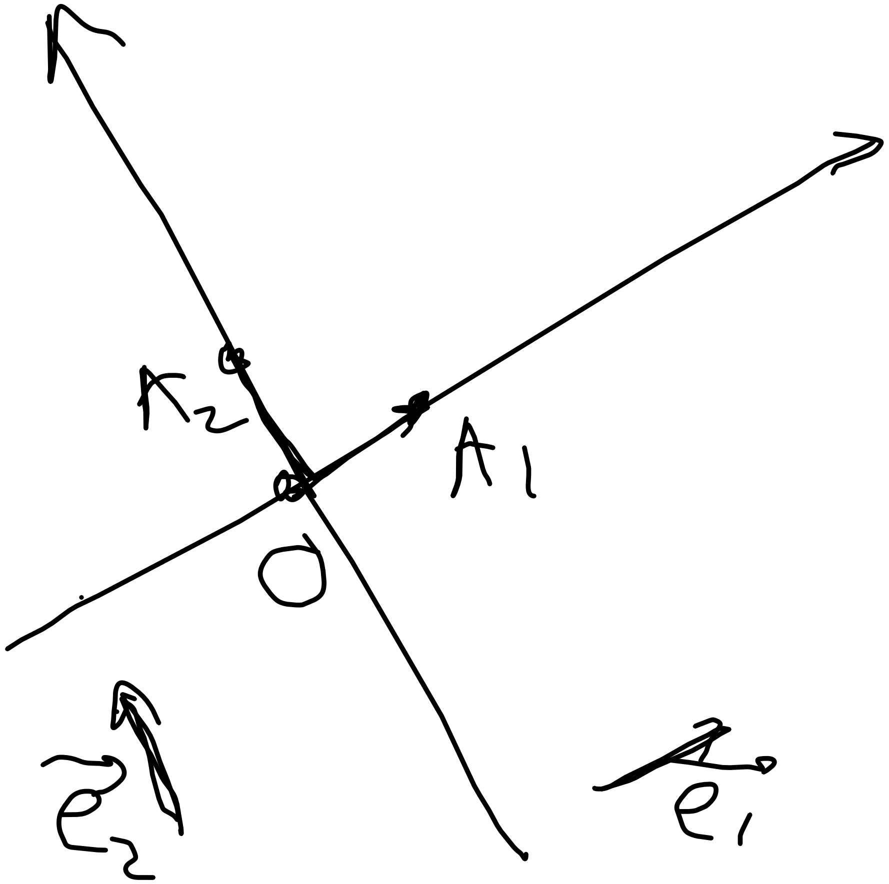
per il vettore libero $\overrightarrow{PQ}$ vale:

$$\overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$$

Spazio euclideo: terna $(\vec{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \tau)$ soliti, ma dove $\vec{\mathcal{A}}$ è in realtà uno spazio vettoriale euclideo $(\vec{\mathcal{A}}, \langle , \rangle)$.

Riferimento cartesiano di uno spazio euclideo: $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ dove $\vec{\mathcal{B}}$ è una base ortonormale di $(\vec{\mathcal{A}}, \langle , \rangle)$

Coordinate cartesiane di un punto: le sue coordinate rispetto a un riferimento cartesiano.



Sp. euclideo $(\vec{\mathcal{A}}_{\langle,\rangle}, \mathcal{A}, \tau)$

$\vec{\mathcal{B}}$ base ortonormale

$\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ cartesiano

$$\Big\downarrow \Phi_{\mathcal{B}}$$

$$\left(\mathbb{R}^n_{\langle,\rangle_{nat}}, \mathbb{R}^n, \tau\right)$$

Torna nell'affine:

$\mathcal{A}$ spazio affine, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ suoi sottospazi

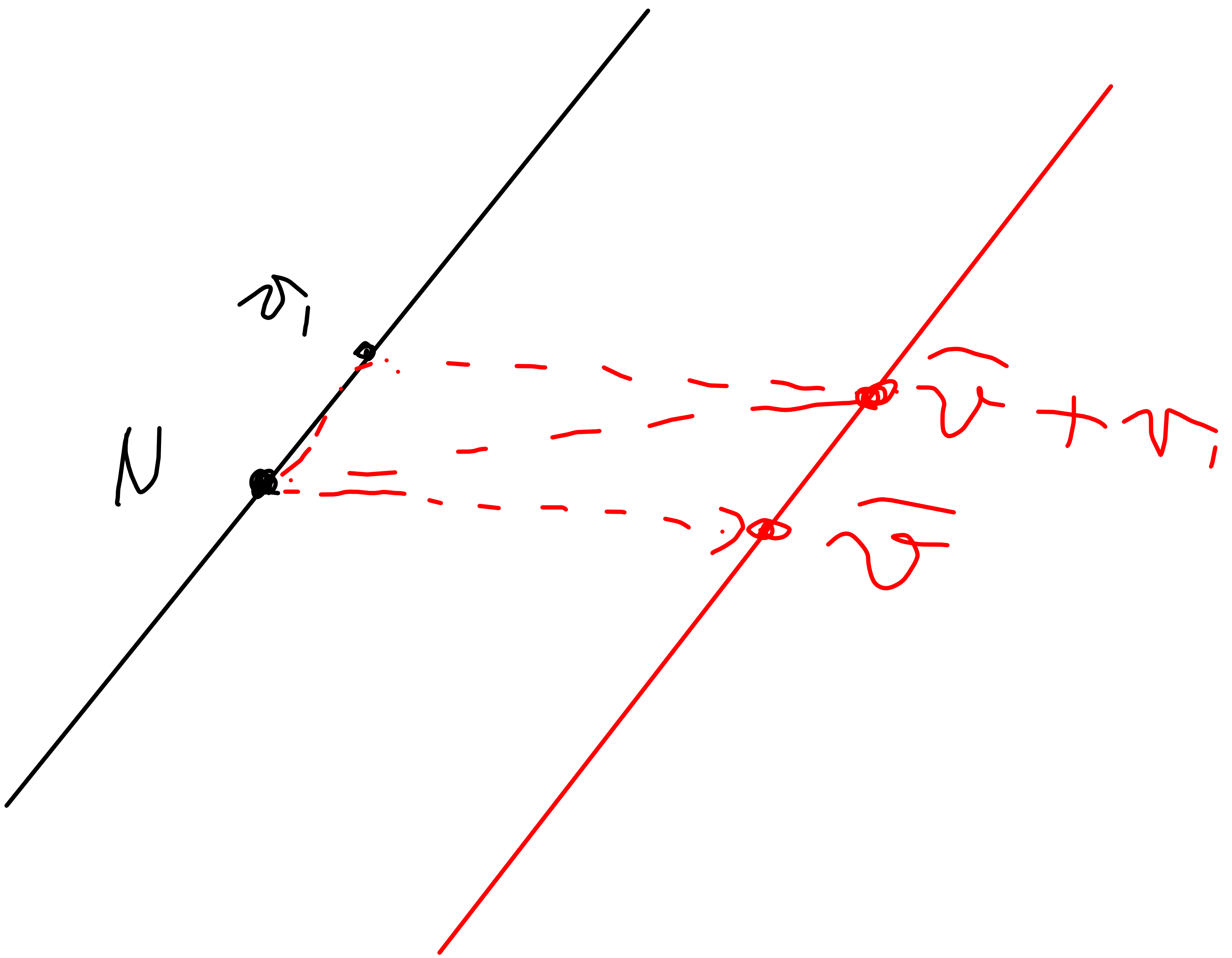
$\mathcal{A}_1$ si dice parallela ad $\mathcal{A}_2$ (e viceversa)

se $\vec{\mathcal{A}_1} \subseteq \vec{\mathcal{A}_2}$ o $\vec{\mathcal{A}_2} \subseteq \vec{\mathcal{A}_1}$

In pratica, sottospazi affini di $\mathcal{A}$ (vista come spazio vettoriale) sono traslati di sottospazi vettoriali di $\mathcal{A}$.

Traslato di un insieme $X \subset \mathcal{A}$ mediante $\bar{v} \in \mathcal{A}$: $\{w \in A \mid \exists v \in X$ per cui $w = \bar{v} + v\}$

Un sottospazio affine $\mathcal{A}'$ è dunque il traslato di un certo sottospazio vettoriale, che è detta <u>giacitura</u> di $\mathcal{A}'$, ed è isomorfa allo spazio dei suoi vettori liberi $\vec{\mathcal{A}'}$


v_1
N
$\bar{v} + v_1$
$\bar{v}$

Iperpiano: sottospazio di $\underset{\dim = n}{\mathcal{R}}$ di $\dim = n-1$

Retta: sottospazio di $\dim = 1$

In $\mathcal{R}$ euclideo
rette $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ si dicono ortogonali
se un vettore non nullo di $\vec{\mathcal{R}}_1$ è ortogonale
a un vettore non nullo di $\vec{\mathcal{R}}_2$.

Retta r, iperpiano Π si dicono **ortogonali** se $\vec{r}$ è il complemento ortogonale di $\vec{\Pi}$

Iperpiani Π, Π' si dicono **ortogonali** se sono ortogonali rette r ed r', dove $r \perp \Pi$ e $r' \perp \Pi'$

è ortogonale a