Ho spazi affini $\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A}^m$. Una trasformazione affine $F: \mathcal{A}^n \longrightarrow \mathcal{A}^m$ è la composizione di una trasf. lin. con una traslazione.

vuol dire: $\dim \mathcal{A} = n$

Fissati riferimenti in $\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A}^m$, una trasf. affine si rappresenta:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underset{m \times n}{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Affinità</u> di $\mathbb{R}^n$: una trasformazione affine biiettiva da $\mathbb{R}^n$ a sé

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underset{n\times n}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\det A \neq 0$$

Trasf. affine da $\mathcal{A}^2$ ad $\mathcal{A}^3$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Affinità di $\mathcal{A}^2$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rappresentazione parametrica minima di un sottospazio affine $\mathcal{A}'^h$ di $\mathcal{A}^n$ come immagine di una trasf. affine iniettiva da $\mathbb{R}^h$ ad $\mathcal{A}^n$

Rappresentazione cartesiana come insieme di soluzioni di un sistema lineare (in generale non omogeneo) di rango $n-h$

Dati punti $P_0, P_1, \dots, P_r$ rispetto a un fissato riferimento affine, cerca il sottospazio affine $\mathcal{A}'$ generato ~~da~~ essi, cioè il

passante per

sottospazio di minima dimensione che li contiene

---

a) Trovo (per differenza di coordinate) le componenti dei vettori liberi $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_r}$ e le metto in colonna

Con Kronecker elimino vettori combin. lin. degli altri. Ho la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_h^1 \\ \vdots & & \\ a_1^n & \cdots & a_h^n \end{pmatrix}$$

1par) Date le coord. $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_h \end{pmatrix}$ di P_0, la rapp. par. di $\mathcal{A}'$ è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{n \times h}{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}^h$

$\vec{\mathcal{A}}^h$

1cart) Alla matrice A affianca la colonna di componenti del vettore libero $\overrightarrow{P_0 X}$, dove $X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è il generico punto di $\mathcal{A}^n$.

$$\begin{pmatrix} (x_1 - c_1) & a_1^1 & \cdots & a_h^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n - c_n) & a_1^n & \cdots & a_h^n \end{pmatrix}$$

Impongo che il suo rango sia h, uguagliando a 0 gli $n-h$ orlati del minore trovato al passo 0

In $\mathbb{A}^5$, rispetto a un fissato riferimento:

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Trovare il sottosp. affine passante per $P_0, \dots, P_3$ in forma par.e cart. minime

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{P_0P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad M$$

$$|M| = 2 \neq 0$$

$$rk = 3$$

$$|O_1| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_3| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Param.:

$$\mathcal{A}^1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & \boxed{0} \\ 1 & -1 & 1 \\ \boxed{0} & -2 & \boxed{1} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Cart.:

$$\begin{array}{c} (x_1+1) \\ x_2 \\ (x_3-1) \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|\theta_1| = 0$:

$$\begin{vmatrix} (x_1+1) & 2 & 2 & 0 \\ x_2 & 1 & -1 & 1 \\ (x_3-1) & 0 & -2 & 1 \\ x_5 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$|\theta_2| = 0$:

$$\begin{vmatrix} (x_1+1) & 2 & 2 & 0 \\ (x_3-1) & 0 & -2 & 1 \\ x_4 & -1 & 1 & -1 \\ x_5 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathcal{A}^1 \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$= 0$

$= 0$

$$\vec{\mathcal{A}}^1 \quad \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Retta di $\mathcal{A}^n$

In forma par.:

$$r: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} (\alpha) + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = l_1\alpha + c_1 \\ \vdots \\ x_n = l_n\alpha + c_n \end{cases}$$

sono componenti di un vettore libero di r

sono detti

coefficienti direttori

di r

Sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità

Dato un sistema omogeneo di n eq. in $n+1$ incognite, di rango n

$$\begin{cases} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_{n+1} x_{n+1} = 0 \\ \dots \\ a^n_1 x_1 + \dots + a^n_{n+1} x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

la generica soluzione è

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}) = \lambda \left(|M_1|, -|M_2|, +|M_3|, \dots, (-1)^n |M_{n+1}| \right)$$

dove M_i è il minore ottenuto dalla matrice incompleta cancellando la colonna i

In forma cartesiana:

$$r: \begin{cases} a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = b_1 \\ - - - - - - \\ a_1^{n-1} x_1 + \dots + a_n^{n-1} x_n = b_{n-1} \end{cases}$$

Per trovare i coeff. dir. risolvo $\begin{cases} a_1^1 x_1 \dots = 0 \\ a_1^{n-1} x_1 \dots = 0 \end{cases}$

cioè

$$(l_1, \dots, l_n) \sim \left(|M_1|, -|M_2|, \dots, (-1)^{n-1} |M_n| \right)$$

Rappresentazione frazionaria della retta

r passante per $P_0 \equiv (a_1, \dots, a_n)$ e con coeff. dir. $(l_1, \dots, l_n)$

$$\frac{x_1 - a_1}{l_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{l_n}$$

$$\frac{x_1 - a_1}{l_1} = \dots = \frac{x_n - a_n}{l_n} = \gamma \quad \begin{cases} x_1 = l_1 \gamma + a_1 \\ \dots \\ x_n = l_n \gamma + a_n \end{cases}$$

Rette del piano per $(0,0)$

$r: ax+by=0$ con $(a,b)\neq(0,0)$

$$by=-ax$$

$$y=-\frac{a}{b}x \qquad m=-\frac{a}{b}$$

$r: ax+by+c=0$

$\neq 0$

Quali sono i coeff. dir.?

(a,b)

$(\ell_1,\ell_2)\sim(|M_1|,-|M_2|)=(b,-a)$

A^2 $\quad P_0 \equiv (1,3) \quad P_1 \equiv (-2,4) \quad \overline{P_0P_1} \equiv (-3, 1)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad l \quad\quad m$

r per P_0

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} (\alpha) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -3\alpha + 1 \\ y = \alpha + 3 \end{cases}$$

Impongo

$$rk \begin{pmatrix} (x-1) & -3 \\ (y-3) & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{cioè} \quad \begin{vmatrix} (x-1) & -3 \\ (y-3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (x-1) + 3(y-3) = 0$$

$$r: x + 3y - 10 = 0$$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{1}$$

$\mathbb{R}^3$ retta r per $P_0 \equiv (1,2,-1)$ e $P_1 \equiv (5,7,10)$

$$\overrightarrow{P_0P_1} \equiv (\underset{l}{4}, \underset{m}{5}, \underset{n}{11})$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{11}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}(\alpha) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 4\alpha + 1 \\ y = 5\alpha + 2 \\ z = 11\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3 = 0 \\ 11x - 4z - 15 = 0 \end{cases}$$

Impongo

$$rk\begin{pmatrix} (x-1) & \boxed{4} \\ (y-2) & 5 \\ (z+1) & 11 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} (x-1) & 4 \\ (y-2) & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} (x-1) & 4 \\ (z+1) & 11 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 5 - 4y + 8 = 0 \\ 11x - 11 - 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{A}^3$ Sottospazio per $P_0 \equiv (1,2,3)$, $P_1 \equiv (1,3,4)$, $P_2 \equiv (2,3,3)$

$\overrightarrow{P_0P_1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_0P_2} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 1} \\ 1 \quad 1 \\ \boxed{1 \quad 0} \end{pmatrix}$ Piano

$$\mathcal{A}^1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Impongo

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} (x-1) & \boxed{0 \quad 1} \\ (y-2) & 1 \quad 1 \\ (z-3) & \boxed{1 \quad 0} \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} (x-1) & 0 & 1 \\ (y-2) & 1 & 1 \\ (z-3) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(x-1) + (y-2) - (z-3) = 0$$

$$\mathcal{A}^1 : -x + y - z + 2 = 0$$

Come comportarsi se ho qualche coeff. di dir. nullo nella forma fraz.

$$\cancel{\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{0}} = \alpha$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = 4\alpha - 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+1}{4} \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{0}} = \alpha$$

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = -1 \\ z = +2 \end{cases}$$

Dato un sottospazio $\mathcal{A}'$ di dim $= n-2$, rappresentato da
$$\begin{cases} a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b = 0 \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n - d = 0 \end{cases}$$
(sistema con ranghi 2 e 2)

chiamo <u>fascio di iperpiani per $\mathcal{A}'$</u> l'insieme di <u>tutti gli iperpiani</u> contenenti $\mathcal{A}'$.

PROP – Il generico iperpiano del fascio ha equazione
$$\alpha(a_1x_1 + \dots + a_nx_n - b) + \beta(c_1x_1 + \dots + c_nx_n - d) = 0$$
con $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

Rette r, r' di coeff. dir $(l_1, \dots, l_n)$, $(l'_1, \dots, l'_n)$ risp.

Iperpiani π, π' di eq $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, $a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = b'$ risp.

In A^n affine, risp a un rif. affine	In $\mathcal{E}^n$ eucl, risp a un rif Cart.
$r \parallel r' \iff (l_1, \dots, l_n) \sim (l'_1, \dots, l'_n)$	$r \perp r' \iff l_1 l'_1 + \dots + l_n l'_n = 0$
$r \parallel \pi \iff a_1 l_1 + \dots + a_n l_n = 0$	$r \perp \pi \iff (l_1, \dots, l_n) \sim (a_1, \dots, a_n)$
$\pi \parallel \pi' \iff (a_1, \dots, a_n) \sim (a'_1, \dots, a'_n)$	$\pi \perp \pi' \iff a_1 a'_1 + \dots + a_n a'_n = 0$

$\mathcal{E}^3$ rif. cart.

Sia $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{5}$, $\bar{P} \equiv (6, 7, 8)$

Trovare il piano per $\bar{P}$, $\perp r$

$$3(x-6) + 1(y-7) + 5(z-8) = 0 \quad \text{— — — .}$$

Trovare la retta r' per $\bar{P}$, $\parallel r$

$$r': \frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-8}{5}$$

$\mathcal{E}^2$ rif. cart. $\quad r: 5x + 8y = 3 \qquad \overline{P} \equiv (4, 2)$

Trovare la retta $r' \parallel r$ per $\overline{P}$

$$5(x-4) + 8(y-2) = 0 \qquad 5x + 8y - 36 = 0$$

Trovare la retta s per $\overline{P}$, $\perp r$

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-2}{8}$$

$\mathcal{A}^3$ retta r : $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ $\qquad \bar{P} \equiv (1,1,1)$

Trovare il piano Π per r e $\bar{P}$

Fascio di piani per r:

$$\alpha(x+y+z-1)+\beta(y-2z)=0$$

Impongo il passaggio per $\bar{P}$:

$$\alpha(1+1+1-1)+\beta(1-2)=0$$

$$2\alpha-\beta=0 \qquad \beta=2\alpha \qquad \text{scelgo } \alpha=1$$

$$(x+y+z-1)+2(y-2z)=0$$

$$\boxed{x+3y-3z-1=0}$$

$\mathbb{A}^3 \quad r: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad s: \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z}{7}$

Trovare il piano π' per r, $\parallel s$

Fascio per r:

Coeff. dir. di s: $(l,m,n) \sim (5,6,7)$

$$\alpha(x+y+z-1) + \beta(y-2z) = 0$$

$$\underbrace{\alpha}_{a=} x + \underbrace{(\alpha+\beta)}_{b=} y + \underbrace{(\alpha-2\beta)}_{c=} z - \alpha = 0$$

$$\parallel \iff 5\alpha + 6(\alpha+\beta) + 7(\alpha-2\beta) = 0$$

$$18\alpha - 8\beta = 0 \qquad \beta = \frac{9}{4}\alpha \qquad \text{Scelgo } \alpha = 4 \quad \beta = 9$$

$$4(x+y+z-1) + 9(y-2z) = 0$$