

Direzione: la giacitura di una retta

"Quante" sono le direzioni nel piano?
E nello spazio?

$\frac{x}{l_1} = \frac{y}{l_2}$ $l_2 x = l_1 y$ $y = m x$ 1 grado di libertà

$m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $(1,0) \leftrightarrow y=0 \leftrightarrow m=0$
 $(0,1) \leftrightarrow x=0 \leftrightarrow m=\infty$

$(l_1, l_2) \neq (0,0)$
 $(\lambda l_1, \lambda l_2) \sim (l_1, l_2)$
 $\lambda \neq 0$ $\frac{\infty^2}{\infty} = \infty^{2-1} = \infty^1$
 $m = \frac{l_2}{l_1}$

$$z : \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

"Quanti" piani nel fascio?

1 grado di libertà

$$g : \alpha (x - y + 2z - 3) + \beta (x + 5y - z) = 0$$

$$k = \frac{\beta}{\alpha} \quad k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$(1, 0) = (1, 0) \Leftrightarrow \pi_1 \Leftrightarrow k = 0$$

$$(0, 1) = (0, 1) \Leftrightarrow \pi_2 \Leftrightarrow k = \infty$$

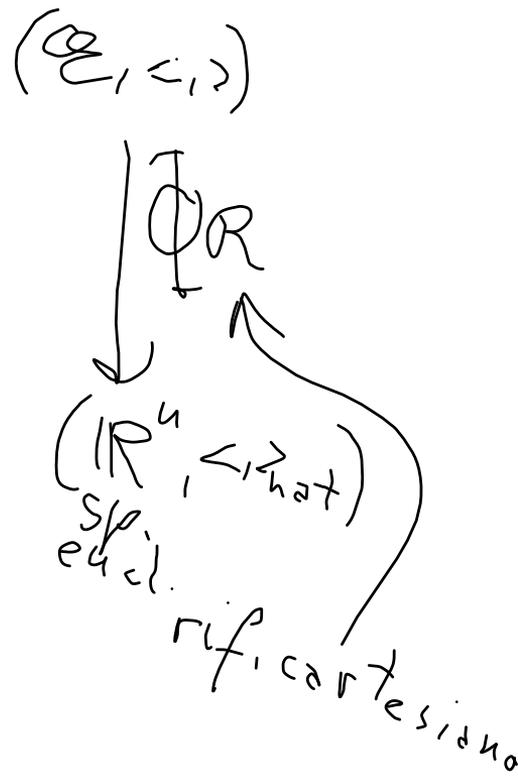
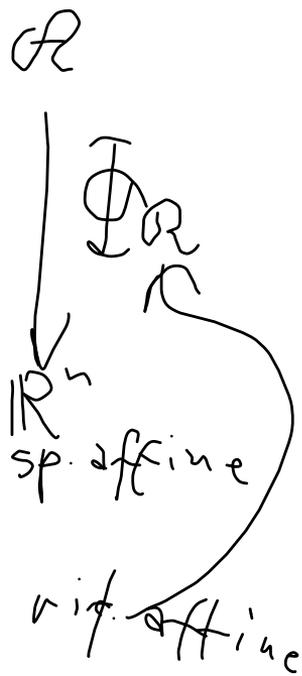
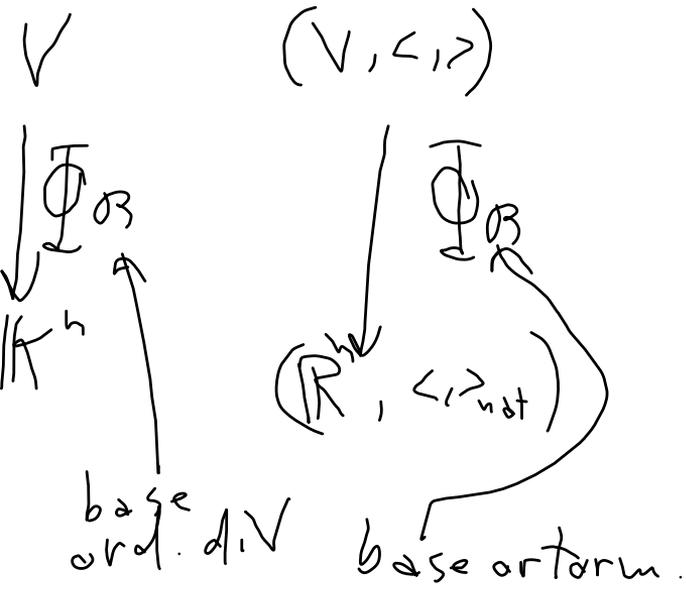
$$\frac{x}{e} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

2 gradi di libertà

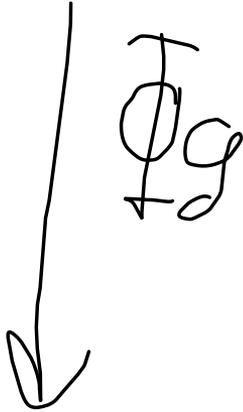


$$(e, m, n) \neq (a, a, a)$$

ogni direzione è rappresentata da
una tale terna a meno di un fattore
di proporzionalità.



$$(K^{n+1}, \rho, \mathcal{J})$$



$$(K^{n+1}, \underbrace{K^{n+1} - \rho(0)}_{\sim}, \mathcal{J})$$

Retta proiettiva \mathbb{RP}^1 . Sui punti

$$A_0 = \underbrace{[(1, 2)]}_{v_0} \quad A_1 = \underbrace{[(-1, 3)]}_{v_1} \quad U = \underbrace{[(2, 9)]}_{u}$$

a) Si verifichi che $\mathcal{G} = (A_0, A_1, U)$ è un rif. proiettivo

b) Si trovi una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^2 normalizzata risp. ad \mathcal{G}

c) Dato il punto $P = [(5, 8)]$ se ne trovino coord. omogenee risp. ad \mathcal{G}

$$a) \quad \checkmark \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

b) Cerco α, β tali che $\alpha v_1 + \beta v_2 \stackrel{A}{=} u$

$$\alpha (1, 2) + \beta (-1, 3) = (2, 9)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ 5\beta = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2 + 1 = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$B = (v_1', v_2') = ((3, 6), (-1, 3))$$

$$c) P = [(5, 8)]$$

Cerco X_0, X_1 t. c.

$$(5, 8) = X_0(3, 6) + X_1(-1, 3)$$

$$\begin{cases} 3X_0 - X_1 = 5 \\ 6X_0 + 3X_1 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3X_0 - X_1 = 5 \\ \rightarrow X_1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = \frac{5 - \frac{2}{5}}{3} = \frac{23}{15} \\ X_1 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$P \equiv \mathcal{G}\left(\frac{23}{15}, -\frac{2}{5}\right) \sim (23, -6)$$