Direzione: la giacitura di una retta

"Quante" sono le direzioni nel piano?
E nello spazio?

$\frac{x}{\ell_1} = \frac{y}{\ell_2}$ $\ell_2 x = \ell_1 y$ $y = mx$ 1 grado di libertà

$m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ $(1,0) \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow m=0$

$(0,1) \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow m=\infty$

$(\ell_1, \ell_2) \neq (0,0)$ ∞^1

$(\lambda\ell_1, \lambda\ell_2) \sim (\ell_1, \ell_2)$ $m = \frac{\ell_2}{\ell_1}$

$\lambda \neq 0$ $\frac{\infty^2}{\infty} = \infty^{2-1} = \infty^1$

$$r : \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

"Quanti" piani nel fascio?

1 grado di libertà

$$\mathcal{F} : \alpha(\overset{\pi_1}{x - y + 2z - 3}) + \beta(\overset{\pi_2}{x + 5y - z}) = 0$$

$k = \dfrac{\beta}{\alpha}$ $\quad k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$(\alpha, \beta) = (1, 0) \longleftrightarrow \pi_1 \leftrightarrow k = 0$

$(\alpha, \beta) = (0, 1) \longleftrightarrow \pi_2 \leftrightarrow k = \infty$

$$\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$ 2 gradi di libertà

$$(\ell, m, n) \neq (0, 0, 0)$$

ogni direzione è rappresentata da una tale terna a meno di un fattore di proporzionalità

$$V \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n$$

base ord. di V

$$(V, \langle\, , \rangle) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{B}}} (\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle_{nat})$$

base ortonorm.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{R}}} \mathbb{R}^n$$

sp. affine

rif. affine

$$(\mathcal{E}, \langle\, , \rangle) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{R}}} (\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle_{nat})$$

sp. eucl.

rif. cartesiano

$$
\begin{array}{c}
(\mathbb{K}^{n+1}, \mathcal{P}, \vartheta) \\
\Big\downarrow \Phi_g \\
\left(\mathbb{K}^{n+1}, \dfrac{\mathbb{K}^{n+1} - \{(0)\}}{\sim}, \vartheta\right)
\end{array}
$$

Retta proiettiva $\mathbb{RP}^1$. Siano i punti

$A_0 = [\underbrace{(1,2)}_{v_0=}]$ $A_1 = [\underbrace{(-1,3)}_{v_1=}]$ $U = [\underbrace{(2,9)}_{u=}]$

a) Si verifichi che $\mathcal{G} = (A_0, A_1, U)$ è un rif. proiettivo

b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ normalizzata risp. ad $\mathcal{G}$

c) Dato il punto $P = [(5,8)]$ se ne trovino coord. omogenee risp. ad $\mathcal{G}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$

$\checkmark$

b) Cerco α, β tali che $\alpha v_1 + \beta v_2 = u$

$\alpha(1,2) + \beta(-1,3) = (2,9)$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ 5\beta = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 2+1 = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = (v_1', v_2') = ((3,6), (-1,3))$$

c) $P = [(5,8)]$

Cerco x_0, x_1 t.c.

$$(5,8) = x_0(3,6) + x_1(-1,3)$$

$$\begin{cases} 3x_0 - x_1 = 5 \\ 6x_0 + 3x_1 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_0 - x_1 = 5 \\ 5x_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{5 - \frac{2}{5}}{3} = \dfrac{23}{15} \\ x_1 = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$P \equiv_{\mathcal{G}} \left(\frac{23}{15}, -\frac{2}{5}\right) \sim (23, -6)$$