Definizione "sbagliata":
dico che $P_3 = \vartheta(v_3)$ è la somma dei punti $P_1 = \vartheta(v_1)$ e $P_2 = \vartheta(v_2)$ se $v_3 = v_1 + v_2$

È "mal data" perché, se cambio rappresentanti, la condizione può non sussistere

Esempio $\mathbb{R}P^2$ $P_1 = [(1,1,1)]$, $P_2 = [(1,2,3)]$
$P_3 = [(2,3,4)]$ Effettivamente $(2,3,4) = (1,1,1) + (1,2,3)$

Ma ho il diritto di cambiare rappresentanti, per es. $P_1 = [(5,5,5)]$, $P_2 = [(1,2,3)]$, $P_3 = [(-2,-3,-4)]$. MA
$(-2,-3,-4) \neq (5,5,5) + (1,2,3)$

In $\mathbb{P}^4$, rispetto a un rif. pro. $\mathcal{R}$, ho $P \equiv (1,1,0,1,2)$, $Q \equiv (-1,3,1,-1,0)$, $R \equiv (0,4,1,0,2)$. Si scriva, in forma cartesiana, il sottospazio proiettivo passante per $P, Q, R$.

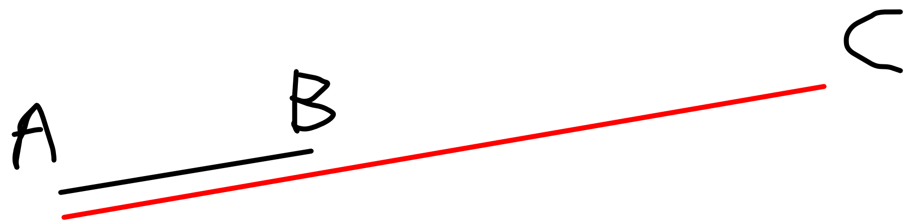
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & -1 & \boxed{0} \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & 1 & 4 \\ x_2 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ x_3 & & \\ x_4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 4 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

Le trasformazioni affini conservano NON le lunghezze, ma i "rapporti semplici" di segmenti collineari:




$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Questo NON vale per le omografie

Sia $\mathbb{P}$ di dim $=1$, e $\mathcal{G}$ un suo fissato riferimento pr.

Sia $\mathbb{P}'$ di dim $=1$, e $\mathcal{G}'$ un suo " " "

---

Dati in $\mathbb{P}$ $A_0 \equiv_{\mathcal{G}} (1,2)$, $A_1 \equiv_{\mathcal{G}} (-1,3)$, $U \equiv_{\mathcal{G}} (2,9)$

in $\mathbb{P}'$ $A'_0 \equiv_{\mathcal{G}'} (-1,5)$, $A'_1 \equiv_{\mathcal{G}'} (3,-5)$, $U' \equiv_{\mathcal{G}'} (12,-30)$

a) si verifichi che $\bar{\mathcal{G}} = (A_0, A_1, U)$, $\bar{\mathcal{G}}' = (A'_0, A'_1, U')$ sono rif. proiettivi.

b) Si scriva, rispetto ad $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{G}'$, la proiettività $\omega : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ tale che $\omega(A_0) = A'_0$

$\omega(A_1) = A'_1$

$\omega(U) = U'$

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓ $\overline{g}$ rif

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 12 \\ 5 & -5 & -30 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ -5 & -30 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 12 \\ 5 & -30 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$ $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

✓ $\overline{g}'$ rif.

b) Base normalizzata rispetto ad $\overline{g}$:

$\overline{B} = ((3,6),(-1,3))$

Cerco una base $\overline{B}'$ norm. rispetto ad $\overline{g}'$:

Cerco $\gamma, \delta$ tali che

$\gamma(-1,5) + \delta(3,-5) = (12,-30)$

$\begin{cases} -\gamma + 3\delta = 12 \\ 5\gamma - 5\delta = -30 \end{cases}$ $\begin{cases} -\gamma + 3\delta = 12 \\ 10\delta = 30 \end{cases}$

$\begin{cases} \gamma = 9 - 12 = -3 \\ \delta = 3 \end{cases}$

$\overline{B}' = ((3,-15),(9,-15))$

Cerco la trasf. lin. che manda $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$:

$$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -15 & -15 \end{pmatrix}}_{Y} \qquad M = Y \cdot X^{-1} \qquad X^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -15 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -45 & 30 \\ 45 & -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Dato uno sp. vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$, le forme lineari su $V$ (cioè trasformazioni lineari $V \to \mathbb{K}$) si possono sommare e moltiplicare per scalare come al solito:

$$T : V \to \mathbb{K}, \quad S : V \to \mathbb{K}$$

definisco $M = T + S : V \to \mathbb{K}$

$$\forall v \in V \quad M(v) = T(v) + S(v)$$

con $\alpha \in \mathbb{K}$ definisco $N = \alpha \cdot T : V \to \mathbb{K}$

$$\forall v \in V \quad N(v) = \alpha \cdot T(v)$$

questi + e ·

$$V^* = \{\text{forme lineari su } V\}$$

$(\mathbb{K}, V^*, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale detto spazio duale di $V$

In particolare $V=\mathbb{R}^n$. Come è fatta una forma lineare su $\mathbb{R}^n$?

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

la posso identificare tramite la sua n-pla di coefficienti $(a_1, \dots, a_n)$

$$S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$$

identificata da $(b_1, \dots, b_n)$

PROP — $T+S$ è identificata da $(c_1, \dots, c_n) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$.

$\alpha \cdot T$ è identificata da $(d_1, \dots, d_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n)^* & & a_1x_1+\dots+a_nx_n \\ \Big\downarrow \Phi & & \Big\downarrow \\ \mathbb{R}^n & & (a_1,\dots,a_n) \end{array}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^{n+1})^* & \qquad & \mathbb{P}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{K}^{n+1} & & \mathbb{P} \end{array}$$

$\mathbb{P}^*$ spazio proiettivo duale di $\mathbb{P}$ $n$-dimensionale

Cos'è un elemento di $\mathbb{P}^*$ ?

Un elemento di $\mathbb{P}^*$ è una classe di proporzionalità di forme lineari non nulle.

$[T]_\sim$ $\quad$ $[a_0x_0 + \cdots + a_nx_n]_\sim$

$\neq$ forma nulla $\quad$ $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$

---

$a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$

$(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$

a meno di un fattore moltiplicativo

$5x_0 + 2x_1 - 3x_2 = 0$

$10x_0 + 4x_1 - 6x_2 = 0$

$$
\begin{tikzcd}
(a_0, \dots, a_n) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{punto di coord. pro. } (a_0, \dots, a_n) \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \begin{array}{l} \text{iperpiano di} \\ \text{equazione} \\ a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0 \end{array} &
\end{tikzcd}
$$

$\cap$ di due piani in $\mathbb{R}^3$ distinti

$$\begin{cases} ax + by + cz - d = 0 \\ a'x + b'y + c'z - d' = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}}_{rk=1}\begin{matrix} d \\ d \end{matrix}\right)}_{rk=2}$$

può capitare

$\cap$ di due piani in $\mathbb{P}^3$ distinti

$$\begin{cases} pX_0 + qX_1 + rX_2 + sX_3 = 0 \\ p'X_0 + q'X_1 + r'X_2 + s'X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ p' & q' & r' & s' \end{pmatrix}}_{rk=2}$$

Duale della retta di $\mathbb{P}^3$ $r: \begin{cases} pX_0 + qX_1 + rX_2 + sX_3 = 0 \\ p'X_0 + q'X_1 + r'X_2 + s'X_3 = 0 \end{cases}$

è la retta

dei punti $(X_0, X_1, X_2, X_3) =$

$$= \lambda (p, q, r, s) + \mu (p', q', r', s')$$