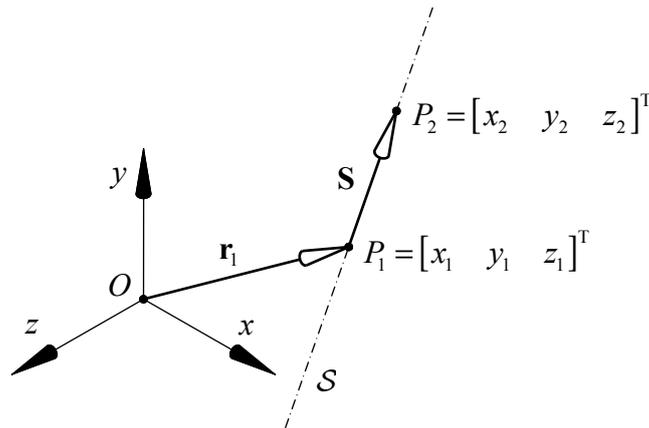


## CINETOSTATICA, CINEMATICA E GEOMETRIA DELLE RETTE

Così come molti concetti fisici sono naturalmente rappresentabili mediante i “classici” vettori tridimensionali, le forze e gli atti di moto sono naturalmente esprimibili, nello spazio proiettivo standard, mediante oggetti geometrico-algebrici chiamati ‘rette’ (o una loro estensione chiamata screw).

### 1 Coordinate di Plücker di una retta



Vettore arbitrario applicato sulla retta  $\mathcal{S}$ :

$$(1) \quad \mathbf{S} = P_2 - P_1 = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Momento della retta  $\mathcal{S}$ :

$$(2) \quad \mathbf{S}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{S} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{S}$  e  $\mathbf{S}_O$  definiscono univocamente la posizione di  $\mathcal{S}$  nello spazio.

Coordinate di Plücker di  $\mathcal{S}$ :

$$(3) \quad \mathcal{S} = [\mathbf{S}^T; \mathbf{S}_O^T]^T = [L \ M \ N; P \ Q \ R]^T$$

Solo quattro tra le sei coordinate di Plücker sono indipendenti:

$$(4) \quad \begin{cases} L^2 + M^2 + N^2 = |\mathbf{S}| \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_O = LP + MQ + NR = 0 \end{cases}$$

Le coordinate di Plucker possono ottenersi attraverso i minori di Grassmann:

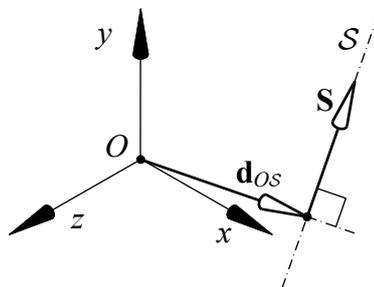
$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
 (5) \quad & \downarrow \\
 & L = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1, \quad M = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_2 - y_1, \quad N = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 - z_1, \\
 & P = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad Q = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad R = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.
 \end{aligned}$$

Coordinate di Plücker di  $\mathcal{S}$  in termini omogenei:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} w_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
 (6) \quad & \downarrow \\
 & L = \begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} = w_1 x_2 - w_2 x_1, \quad M = \begin{vmatrix} w_1 & y_1 \\ w_2 & y_2 \end{vmatrix} = w_1 y_2 - w_2 y_1, \quad N = \begin{vmatrix} w_1 & z_1 \\ w_2 & z_2 \end{vmatrix} = w_1 z_2 - w_2 z_1, \\
 & P = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad Q = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad R = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.
 \end{aligned}$$

Distanza di  $\mathcal{S}$  dall'origine:

$$(7) \quad \mathbf{S}_o = \mathbf{d}_{os} \times \mathbf{S} \Rightarrow |\mathbf{S}_o| = d_{os} |\mathbf{S}| \Rightarrow d_{os} = \frac{|\mathbf{S}_o|}{|\mathbf{S}|} = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{L^2 + M^2 + N^2}.$$



Punto improprio appartenente alla retta  $\mathcal{S} (P_2 \rightarrow \infty)$ :

$$(8) \quad w_2 = 0 \Rightarrow x_2 = L/w_1, y_2 = M/w_1, z_2 = N/w_1 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{w_1} [0 \quad L \quad M \quad N]$$

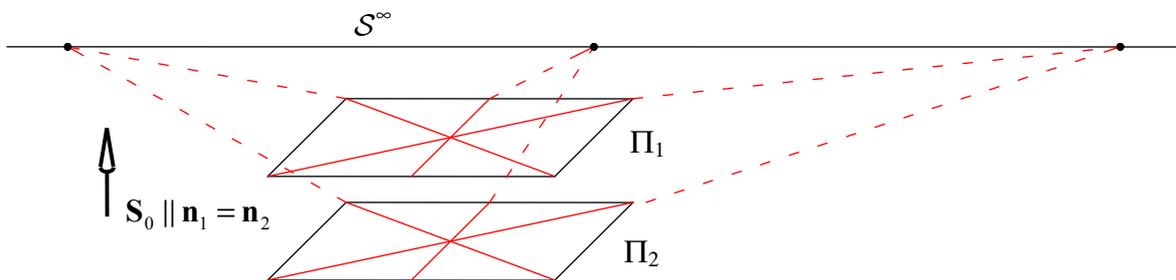
Retta all'infinito  $\mathcal{S}^\infty (P_1 \rightarrow \infty, P_2 \rightarrow \infty)$ :

$$(9) \quad \begin{aligned} & w_1 = w_2 = 0 \\ & \Downarrow \\ L &= \begin{vmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{vmatrix} = 0, & M &= \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{vmatrix} = 0, & N &= \begin{vmatrix} 0 & z_1 \\ 0 & z_2 \end{vmatrix} = 0, \\ P &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = y_1 z_2 - z_1 y_2, & Q &= \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = z_1 x_2 - x_1 z_2, & R &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2; \end{aligned}$$

$$(10) \quad \mathcal{S}^\infty = [\mathbf{0}^T; \mathbf{S}_O^T]^T = [0 \quad 0 \quad 0; P \quad Q \quad R]^T;$$

$$(11) \quad d_{sO} = |\mathbf{S}_O|/|\mathbf{S}| \rightarrow \infty.$$

$\mathcal{S}^\infty$  è la retta all'infinito sulla giacitura normale a  $\mathbf{S}_O$ :



Piani normali ai versori  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  e posti a distanza  $d_1$  e  $d_2$  dall'origine:

$$(12) \quad \Pi_1 : \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1 - d_1 = 0, \quad \Pi_2 : \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2 - d_2 = 0;$$

Retta intersezione tra  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ :

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{S} &= \left[ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)^T; \{ \mathbf{r} \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \}^T \right]^T = \left[ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)^T; \{ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_1 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{n}_2 \}^T \right]^T \\ &= \left[ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)^T; (d_2 \mathbf{n}_1 - d_1 \mathbf{n}_2)^T \right]^T. \end{aligned}$$

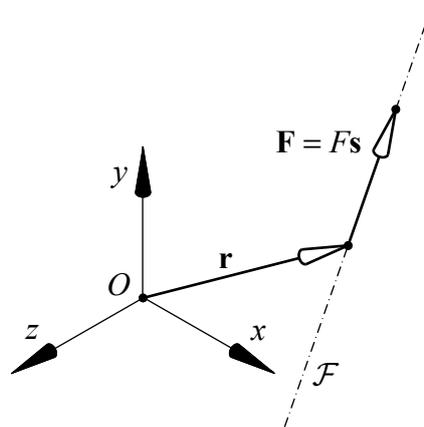
Se  $\mathbf{n}_2 = \pm \mathbf{n}_1$ :

$$(14) \quad \mathcal{S}^\infty = [\mathbf{0}^T; (d_2 \mp d_1) \mathbf{n}_1^T]^T = [\mathbf{0}^T; \mathbf{S}_O^T]^T.$$

## 2 Cinetostatica del corpo rigido

Sia  $\mathbf{S}$  una forza (“vettore applicato su una retta d’azione”):

$$(15) \quad \mathbf{S} = \mathbf{F} = F\mathbf{s}.$$



Coordinate di Plücker della forza:

$$(16) \quad \mathcal{F} = [\mathbf{S}^T; \mathbf{S}_O^T]^T = [\mathbf{F}^T; (\mathbf{r} \times \mathbf{F})^T]^T = [\mathbf{F}^T; \mathbf{M}_O^T]^T.$$

Una coppia (o “momento puro”) è un sistema di forze avente vettore risultante nullo ( $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ) e momento risultante diverso da zero ( $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ ):

$$(17) \quad \mathcal{C} = [\mathbf{0}^T; \mathbf{M}_O^T]^T = \mathcal{F}^\infty$$

Una coppia è dunque interpretabile come una forza d’intensità nulla (o infinitesima) applicata su una retta all’infinito.

Equilibrio di un sistema sottoposto ad un sistema di forze e coppie  $\mathcal{F}_i$ :

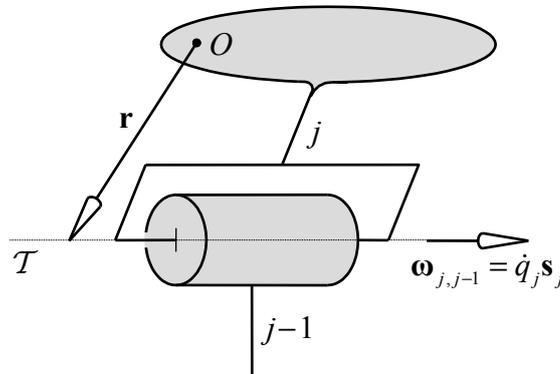
$$(18) \quad \begin{cases} \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}_3 \\ \sum_i \mathbf{M}_{i,O} = \mathbf{0}_3 \end{cases} \Rightarrow \sum_i \mathcal{F}_i = \sum_i \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{M}_{i,O} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_6$$

*Molti teoremi della cinetostatica, enunciati nell’ambito di uno spazio proiettivo standard, non necessitano di distinguere tra punti propri o impropri.*

*Es:  $N$  forze passanti per uno stesso punto sono equipollenti ad un’unica forza passante per lo stesso punto.*

### 3 Cinematica del corpo rigido

Coppia rotoidale:

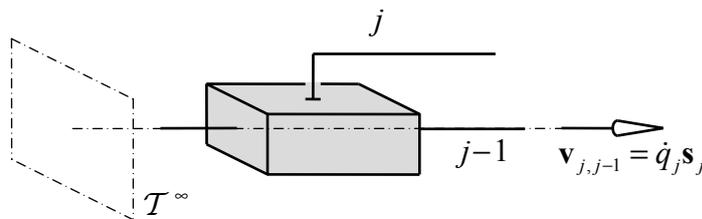


L'atto di moto del membro  $j$  rispetto al membro  $j-1$  è un'istantanea rotazione, di ampiezza  $\omega_{j,j-1}dt$ , intorno all'asse della coppia. L'atto di moto può dunque rappresentarsi mediante la velocità angolare  $\omega_{j,j-1} = \mathbf{S}$  applicata su tale asse.

Coordinate di Plücker dell'atto di moto rotatorio:

$$(19) \quad \mathcal{T} = [\mathbf{S}^T; \mathbf{S}_O^T]^T = [\omega_{j,j-1}^T; (\mathbf{r} \times \omega_{j,j-1})^T]^T = [\omega_{j,j-1}^T; (-\omega_{j,j-1} \times \mathbf{r})^T]^T = [\omega_{j,j-1}^T; \dot{O}_j^T]^T.$$

Coppia prismatica:

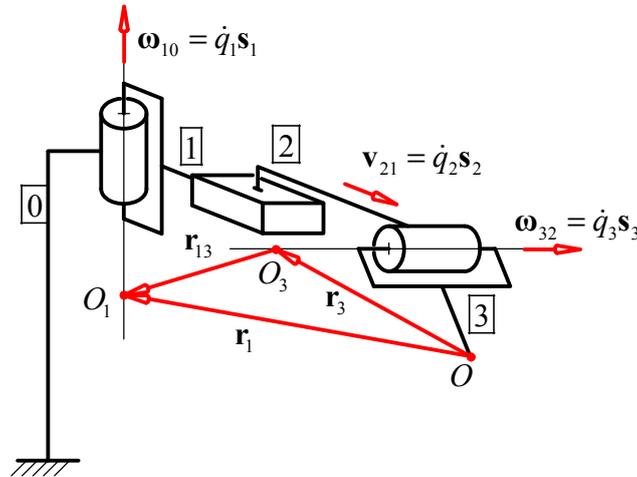


L'atto di moto del membro  $j$  rispetto al membro  $j-1$  è una pura traslazione d'intensità  $\dot{q}_j dt$  nella direzione  $\mathbf{s}_j$  ed è interpretabile come un'istantanea rotazione, di ampiezza nulla, intorno ad una retta all'infinito sulla giacitura perpendicolare a  $\mathbf{s}_j$ .

Coordinate di Plücker dell'atto di moto traslatorio:

$$(20) \quad \mathcal{T}^\infty = [\mathbf{S}^T; \mathbf{S}_O^T]^T = [\omega_{j,j-1}^T; \mathbf{v}_{j,j-1}^T]^T = [\mathbf{0}^T; \mathbf{v}_{j,j-1}^T]^T.$$

Braccio robotico a tre gdl:



Velocità angolare del membro terminale rispetto al telaio:

$$(21) \quad \boldsymbol{\omega}_{30} = \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32} = \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{32}.$$

Velocità del punto  $O_3$  rispetto al telaio:

$$(22) \quad \dot{O}_3 = \dot{O}_1 + \boldsymbol{\omega}_{10} \times (O_3 - O_1) + \mathbf{v}_{21} = \boldsymbol{\omega}_{10} \times (-\mathbf{r}_{13}) + \mathbf{v}_{21} = \mathbf{r}_{13} \times \boldsymbol{\omega}_{10} + \mathbf{v}_{21}.$$

Velocità del punto  $O$  rispetto al telaio:

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{O} &= \dot{O}_3 + \boldsymbol{\omega}_{30} \times (O - O_3) = (\mathbf{v}_{21} + \mathbf{r}_{13} \times \boldsymbol{\omega}_{10}) + (\boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{32}) \times (-\mathbf{r}_3) = \\ &= \mathbf{v}_{21} + \mathbf{r}_{13} \times \boldsymbol{\omega}_{10} + \mathbf{r}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{10} + \mathbf{r}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{32} = \mathbf{v}_{21} + (\mathbf{r}_{13} + \mathbf{r}_3) \times \boldsymbol{\omega}_{10} + \mathbf{r}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{32} = \\ &= \mathbf{v}_{21} + \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{10} + \mathbf{r}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{32}. \end{aligned}$$

Atto di moto del membro terminale rispetto al telaio:

$$(24) \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{30} \\ \dot{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{32} \\ \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{10} + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{r}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{10} \\ \mathbf{r}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{32} \\ \mathbf{r}_3 \times \boldsymbol{\omega}_{32} \end{bmatrix} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2^\infty + \mathcal{T}_3.$$

N.B. L'atto di moto di un corpo rigido, ossia la velocità di un *qualunque* suo punto  $P$  rispetto ad un riferimento, è univocamente definito allorché siano noti la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  del corpo e la velocità di almeno un suo punto  $O$ :  $\dot{P} = \dot{O} + \boldsymbol{\omega} \times (P - O)$ .

#### 4 Ulteriore applicazione cinematica: analogia tra moto sferico e moto piano

*Definizioni classiche:*

Moto cinematicamente piano = tutti i punti descrivono traiettorie parallele ad uno stesso piano.

Moto cinematicamente sferico = tutti i punti descrivono traiettorie sferiche concentriche intorno ad uno stesso punto.

*Definizione nello spazio proiettivo standard:*

Moto sferico = tutti i punti descrivono traiettorie sferiche concentriche intorno ad uno stesso punto (proprio o improprio).

Molti teoremi e proprietà valgono a prescindere dal fatto che il centro del moto sia proprio o improprio, ad es.:

- formula di Grübler:  $gdl = 3(m - c - 1) + \sum_{i=1,c} gdl_i$ ;
- le superfici primitive del moto relativo tra due corpi sono coni (in senso lato);
- assegnati tre corpi A, B e C, gli assi d'istantanea rotazione dei tre moti relativi devono essere complanari (teorema di Aronhold-Kennedy);
- ecc. ecc.