

Anno accademico 2008/09

Programma del corso di GEOMETRIA 1 (prof. Menichetti)

Nozioni generali su gruppi e campi.

Matrici: operazioni e relative proprietà; trasposizione e relative proprietà. L'anello delle  $n \times n$  matrici ad elementi in un campo  $K$ . Matrici invertibili. Il gruppo  $GL_n(K)$ . Rango. Matrici ortogonali. I gruppi  $O_n(K)$ ,  $SO_n(K)$ .

Risoluzione dei sistemi lineari col metodo di riduzione. La soluzione generale dei sistemi omogenei:  $\dim(S) = n - \text{rank}(A)$ . Teoremi di Kronecker-Rouché-Capelli e di Cramer. Regola di Cramer.

Determinante e relative proprietà. Calcolo del determinante. Teoremi di Laplace e di Binet. Minori di una matrice. Minori e rango. Principio dei minori orlati.

Vettori applicati e vettori liberi dello spazio ordinario. Spazi vettoriali sopra un campo  $K$ . Sottospazi e loro intersezione. Somma e somma diretta. Sottospazio generato da due o più sottospazi. Reticolo dei sottospazi (cenni). Generatori e vettori linearmente indipendenti. Basi, basi ordinate e coordinate. Teorema della base (per spazi finitamente generati). Basi dei sottospazi. Formula di Grassmann. Matrice del cambiamento di base.

Applicazioni lineari: proprietà, nucleo ed immagine.  $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V)$ . Applicazioni lineari e basi. Applicazione lineare assegnata mediante l'immagine di una base. Isomorfismi. Lo spazio  $V^n(K)$ . Equazioni degli omomorfismi. La matrice  $M_{B'B}(f)$  e la sua dipendenza da  $B$  e  $B'$ . Matrici simili ed endomorfismi. Rango e determinante di un endomorfismo.

Diagonalizzazione degli endomorfismi e delle matrici. Autovalori, autovettori ed autospazi. Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori. Condizioni di diagonalizzabilità.

Gli spazi  $\text{Hom}(V,W)$ ,  $\text{End}(V)$ ,  $V^*$ . Base duale. L'isomorfismo  $M_{B,B'}: \text{Hom}(V,W) \rightarrow M_{m,n}(K)$ . La composizione di morfismi.  $M_{B'B}(g \circ f) = M_{B'B}(g)M_{B'B}(f)$ . L'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale  $V$  ed il gruppo  $GL(V)$ .

Prodotti scalari. Spazi vettoriali euclidei. Basi ortogonali e procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Matrici ortogonali e basi ortonormali. Il perpendicolare di un sottospazio. Spazi metrici ed isometrie. La metrica negli spazi euclidei. Omomorfismi di spazi euclidei equidimensionali. Operatori unitari. I gruppi  $O(V)$  ed  $SO(V)$ . Isomorfismi.

Spazi affini. Sottospazi e loro intersezione. Sottospazi paralleli e sottospazi sghembi. Punti linearmente indipendenti. Sottospazio generato da due sottospazi e relativa dimensione. Riferimenti affini ed equazioni dei sottospazi.

Isomorfismi di spazi affini: isomorfismi ed isomorfismi semilineari (cenno); isomorfismi ai quali è associato un isomorfismo lineare. Lo spazio  $A^n(K)$ . Condizioni che assegnano un isomorfismo. Il gruppo affine e suoi sottogruppi (traslazioni, affinità con un punto fisso). Equazioni di un'affinità.

Spazi affini euclidei. La metrica euclidea. Riferimenti e coordinate cartesiane. Isomorfismi ed isometrie. Lo spazio  $E^n$ . Il gruppo  $\text{Isom}(E)$  e sottogruppi. Il perpendicolare di un sottospazio e retta perpendicolare. Distanza di un punto da un sottospazio.