

Anno accademico 2008/09

Programma del corso di GEOMETRIA 1 (prof. Menichetti)

Nozioni generali su gruppi e campi.

Matrici: operazioni e relative proprietà; trasposizione e relative proprietà. L'anello delle $n \times n$ matrici ad elementi in un campo K . Matrici invertibili. Il gruppo $GL_n(K)$. Rango. Matrici ortogonali. I gruppi $O_n(K)$, $SO_n(K)$.

Risoluzione dei sistemi lineari col metodo di riduzione. La soluzione generale dei sistemi omogenei: $\dim(S) = n - \text{rank}(A)$. Teoremi di Kronecker-Rouché-Capelli e di Cramer. Regola di Cramer.

Determinante e relative proprietà. Calcolo del determinante. Teoremi di Laplace e di Binet. Minori di una matrice. Minori e rango. Principio dei minori orlati.

Vettori applicati e vettori liberi dello spazio ordinario. Spazi vettoriali sopra un campo K . Sottospazi e loro intersezione. Somma e somma diretta. Sottospazio generato da due o più sottospazi. Reticolo dei sottospazi (cenni). Generatori e vettori linearmente indipendenti. Basi, basi ordinate e coordinate. Teorema della base (per spazi finitamente generati). Basi dei sottospazi. Formula di Grassmann. Matrice del cambiamento di base.

Applicazioni lineari: proprietà, nucleo ed immagine. $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V)$. Applicazioni lineari e basi. Applicazione lineare assegnata mediante l'immagine di una base. Isomorfismi. Lo spazio $V^n(K)$. Equazioni degli omomorfismi. La matrice $M_{B'B}(f)$ e la sua dipendenza da B e B' . Matrici simili ed endomorfismi. Rango e determinante di un endomorfismo.

Diagonalizzazione degli endomorfismi e delle matrici. Autovalori, autovettori ed autospazi. Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori. Condizioni di diagonalizzabilità.

Gli spazi $\text{Hom}(V,W)$, $\text{End}(V)$, V^* . Base duale. L'isomorfismo $M_{B,B'}: \text{Hom}(V,W) \rightarrow M_{m,n}(K)$. La composizione di morfismi. $M_{B'B}(g \circ f) = M_{B'B}(g)M_{B'B}(f)$. L'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale V ed il gruppo $GL(V)$.

Prodotti scalari. Spazi vettoriali euclidei. Basi ortogonali e procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Matrici ortogonali e basi ortonormali. Il perpendicolare di un sottospazio. Spazi metrici ed isometrie. La metrica negli spazi euclidei. Omomorfismi di spazi euclidei equidimensionali. Operatori unitari. I gruppi $O(V)$ ed $SO(V)$. Isomorfismi.

Spazi affini. Sottospazi e loro intersezione. Sottospazi paralleli e sottospazi sghembi. Punti linearmente indipendenti. Sottospazio generato da due sottospazi e relativa dimensione. Riferimenti affini ed equazioni dei sottospazi.

Isomorfismi di spazi affini: isomorfismi ed isomorfismi semilineari (cenno); isomorfismi ai quali è associato un isomorfismo lineare. Lo spazio $A^n(K)$. Condizioni che assegnano un isomorfismo. Il gruppo affine e suoi sottogruppi (traslazioni, affinità con un punto fisso). Equazioni di un'affinità.

Spazi affini euclidei. La metrica euclidea. Riferimenti e coordinate cartesiane. Isomorfismi ed isometrie. Lo spazio E^n . Il gruppo $\text{Isom}(E)$ e sottogruppi. Il perpendicolare di un sottospazio e retta perpendicolare. Distanza di un punto da un sottospazio.