Esercizi d'esame Geo Sup II 2009-2010

nota: tutte le metriche, anche se non esplicitamente richiesto, sono da considerarsi complete.

Esercizio 1. *Sia* $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. *Scrivere un atlante differenziabile per* $\mathbb{S}^2$.

Esercizio 2. *Sia* $T^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = |y| = 1\}$. *Scrivere un atlante differenziabile per* $\mathbb{T}^2$.

Esercizio 3. *Sia* Σ_2 *la superficie orientabile di genere due, cioè il bordo di un intorno regolare di una curva a "8" in* $\mathbb{R}^3$. *Scrivere un atlante differenziabile per* Σ_2.

Esercizio 4. *Dimostrare che* $\mathbb{S}^2$ *non ammette metriche di curvatura strettamente negativa.*

Esercizio 5. *Dimostrare che* Σ_2 *non ammette metriche di curvatura strettamente positiva.*

Esercizio 6. *Dimostrare che il toro* T^2 *non ammette metriche di curvatura strettamente positiva.*

Esercizio 7. *Dimostrare che ogni superficie compatta e liscia di* $\mathbb{R}^3$, *con la metrica indotta, ha almeno un punto a curvatura positiva.*

Esercizio 8. *Scrivere esplicitamente due metriche su* T^2 *a curvatura zero e non isometriche tra loro.*

Esercizio 9. *Dimostrare che ogni toro in* $\mathbb{R}^3$, *con la metrica indotta, ha almeno un punto a curvatura negativa.*

Esercizio 10. *Sia* g *una metrica su* $\mathbb{R}^3$ *a curvatura strettamente negativa* $< k < 0$. *Siano* γ_1 *e* γ_2 *due curve non costanti che siano geodetiche per tali metrica. Dimostrare che se se esiste* C *tale che* $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < C$ *allora* $\gamma_1 = \gamma_2$.

Esercizio 11. *Sia* g *una metrica su* $\mathbb{R}^3$ *a curvatura strettamente negativa* $< k < 0$. *Dimostrare che* g *non ammette geodetiche chiuse non costanti.*

Esercizio 12. *Sia* g *una metrica su* $\mathbb{R}^3$ *con tensore di Ricci positivo. Dimostrare che* $\inf_{\mathbb{R}^3} ||\operatorname{Ric}|| = 0$.

Esercizio 13. *Scrivere una metrica su* $\mathbb{R}^2$ *con curvatura strettamente positiva in ogni punto.*

Esercizio 14. *Scrivere una metrica su* $\mathbb{R}^2$ *con curvatura strettamente negativa in ogni punto.*

Esercizio 15. *Scrivere una superficie* S *di* $\mathbb{R}^3$ *Euclideo tale che la curvatura intrinseca sia nulla ma tale che* S *non sia una superficie minima.*

Esercizio 16. *Scrivere l'evoluzione per curvatura del cerchio di centro 0 e raggio 2 in* $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 17. *Scrivere l'evoluzione per cuvatura di un'iperbole di* $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 18. *Sia* $\gamma(t,s)$ *l'evoluzione per curvatura del cerchio di centro 0 e raggio 1 in* $\mathbb{R}^2$. *Sia* $k_{\max}(t)$ *la curvatura massima di* $\gamma(t,s)$ *al variare di* s *e sia* $\gamma_M = \gamma(t,s)/k_{\max}(t)$. *Scrivere l'equazione di evoluzione per* γ_M. *Qual'è l'intervallo massimo di definizione?*

Esercizio 19. *Calcolare la curvatura geodetica di un parallelo a* $45°$ *di latidutine su* $\mathbb{S}^2$.

Esercizio 20. *Calcolare la curvatura geodetica di una retta a* $45°$ *rispetto all'asse* x *nel modello del semipiano di* $\mathbb{H}^2$.

Esercizio 21. *Calcolare la curvatura geodetica di una retta orizzontale nel modello del semipiano di* $\mathbb{H}^2$.

Esercizio 22. *Calcolare le curvature del grafico della funzione* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x,y) = \sin x + \cos y$$

Esercizio 23. *Calcolare le curvature del grafico della funzione* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x,y) = \sin x \cos y$$

Esercizio 24. *Calcolare le curvature del grafico della funzione* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2$$

Esercizio 25. *Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione* $f(x) = 2 + \sin x$.

Esercizio 26. *Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione* $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Esercizio 27. *Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione* $f(x) = e^x$.

Esercizio 28. *Calcolare le curvature di* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Esercizio 29. *Calcolare le curvature di* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Esercizio 30. *Calcolare le curvature di* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Esercizio 31. *Sia* $\circ$ *il prodotto di Kulkarni-Nomizu. Dimostrare che in dimensione tre si ha:*

$$R = \frac{\mathrm{scal}}{12} g \circ g + \left(\mathrm{Ric} - \frac{scal}{3} g \right) \circ g$$

ove g *è la metrica e* R *è il Riemann.*

Esercizio 32. *Sia M una varietà Riemanniana. Dimostrare che $d = dx^i \wedge \nabla_{\partial_i}$. Cioè per ogni forma ω si ha*

$$d\omega = dx^i \wedge \nabla_{\partial_i}\omega.$$

Dedurne che per ogni campo X si ha

$$\operatorname{div}(X)\, dvol = d(i_X\, dvol)$$

ove $dvol$ indica la forma di volume di M.

Esercizio 33. *Sia $N \subset M$ una sottovarietà di una varietà Riemanniana, (M, g), dotata della metrica indotta. Sia $\nu_i, \ldots, \nu_k$ una base ortonormale del fibrato normale a N in M. Sia $\Pi_i(X,Y)$ la componente lungo ν_i della seconda forma fondamentale di N (ovvero $\Pi(X,Y) = \sum_i g(\Pi(X,Y),\nu_i)\nu_i$.) Dimostrare che vale*

$$R^M(X,Y,Z,T) = R^N(X,Y,Z,T) + \sum_i \Pi_i(X,Z)\Pi(Y,T) - \Pi_i(Y,Z)(X,T).$$

Ove R^M indica il Riemann di M e R^N quello di N.