Esercizi d'esame Geo Sup II 2009-2010

nota: tutte le metriche, anche se non esplicitamente richiesto, sono da considerarsi complete.

Esercizio 1. *Sia* $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. *Scrivere un atlante differenziabile per* $\mathbb{S}^2$.

Esercizio 2. *Dimostrare che la superficie di genere due* Σ_2 *non ammette metriche di curvatura strettamente positiva.*

Esercizio 3. *Scrivere esplicitamente due metriche sul toro* T^2 *a curvatura zero e non isometriche tra loro.*

Esercizio 4. *Sia* g *una metrica su* $\mathbb{R}^3$ *con tensore di Ricci positivo. Dimostrare che* $\inf_{\mathbb{R}^3} ||\operatorname{Ric}|| = 0$.

Esercizio 5. *Scrivere una superficie* S *di* $\mathbb{R}^3$ *Euclideo tale che la curvatura intrinseca sia nulla ma tale che* S *non sia una superficie minima.*

Esercizio 6. *Scrivere l'evoluzione per curvatura del cerchio di centro* 0 *e raggio* 2 *in* $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 7. *Calcolare la curvatura geodetica di una retta orizzontale nel modello del semipiano di* $\mathbb{H}^2$.

Esercizio 8. *Calcolare le curvature del grafico della funzione* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

Esercizio 9. *Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione* $f(x) = 2 + \sin x$.

Esercizio 10. *Calcolare le curvature di* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Esercizio 11. *Sia* $N \subset M$ *una sottovarietà di una varietà Riemanniana,* (M, g)*, dotata della metrica indotta. Sia* $\nu_i, \dots, \nu_k$ *una base ortonormale del fibrato normale a* N *in* M. *Sia* $\Pi_i(X, Y)$ *la componente lungo* ν_i *della seconda forma fondamentale di* N *(ovvero* $\Pi(X, Y) = \sum_i g(\Pi(X, Y), \nu_i)\nu_i$.*) Dimostrare che vale*

$$R^M(X, Y, Z, T) = R^N(X, Y, Z, T) + \sum_i \Pi_i(X, Z)\Pi(Y, T) - \Pi_i(Y, Z)(X, T).$$

Ove R^M *indica il Riemann di* M *e* R^N *quello di* N.