Esercizi d'esame Geo Sup II 2009-2010

nota: tutte le metriche, anche se non esplicitamente richiesto, sono da consideraresi complete.

Esercizio 1. *Sia* $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = |y| = 1\}$*. Scrivere un atlante differenziabile per* $\mathbb{T}^2$*.*

Esercizio 2. *Dimostrare che* $\mathbb{S}^2$ *non ammette metriche di curvatura strettamente negativa.*

Esercizio 3. *Dimostrare che ogni superficie compatta e liscia di* $\mathbb{R}^3$*, con la metrica indotta, ha almeno un punto a curvatura positiva.*

Esercizio 4. *Sia* g *una metrica su* $\mathbb{R}^3$ *a curvatura strettamente negativa* $< k < 0$*. Siano* γ_1 *e* γ_2 *due curve non costanti, geodetiche per tali metrica. Dimostrare che se se esiste* C *tale che* $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < C$ *allora* $\gamma_1 = \gamma_2$*.*

Esercizio 5. *Scrivere una metrica su* $\mathbb{R}^2$ *con curvatura strettamente positiva in ogni punto.*

Esercizio 6. *Scrivere l'evoluzione per cuvatura di un'iperbole di* $\mathbb{R}^2$*.*

Esercizio 7. *Calcolare la curvatura geodetica di un parallelo a* $45°$ *di latidutine su* $\mathbb{S}^2$*.*

Esercizio 8. *Calcolare le curvature del grafico della funzione* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y) = \sin x + \cos y$$

Esercizio 9. *Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione* $f(x) = e^x$*.*

Esercizio 10. *Calcolare le curvature di* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$*.*

Esercizio 11. *Sia* M *una varietà Riemanniana. Dimostrare che* $d = dx^i \wedge \nabla_{\partial_i}$*. Cioè per ogni forma* ω *si ha*

$$d\omega = dx^i \wedge \nabla_{\partial_i} \omega.$$

Dedurne che per ogni campo X *si ha*

$$\mathrm{div}(X)\, dvol = d(i_X\, dvol)$$

ove $dvol$ *indica la forma di volume di* M*.*