

## Esercizi d'esame Geo Sup II 2009-2010

nota: tutte le metriche, anche se non esplicitamente richiesto, sono da considerarsi complete.

**Esercizio 1.** Sia  $\Sigma_2$  la superficie orientabile di genere due, cioè il bordo di un intorno regolare di una curva a "8" in  $\mathbb{R}^3$ . Scrivere un atlante differenziabile per  $\Sigma_2$ .

**Esercizio 2.** Dimostrare che il toro  $\mathbb{T}^2$  non ammette metriche di curvatura strettamente positiva.

**Esercizio 3.** Dimostrare che ogni toro in  $\mathbb{R}^3$ , con la metrica indotta, ha almeno un punto a curvatura negativa.

**Esercizio 4.** Sia  $g$  una metrica su  $\mathbb{R}^3$  a curvatura strettamente negativa  $< k < 0$ . Dimostrare che  $g$  non ammette geodetiche chiuse non costanti.

**Esercizio 5.** Scrivere una metrica su  $\mathbb{R}^2$  con curvatura strettamente negativa in ogni punto.

**Esercizio 6.** Sia  $\gamma(t, s)$  l'evoluzione per curvatura del cerchio di centro 0 e raggio 1 in  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $k_{\max}(t)$  la curvatura massima di  $\gamma(t, s)$  al variare di  $s$  e sia  $\gamma_M = \gamma(t, s)/k_{\max}(t)$ . Scrivere l'equazione di evoluzione per  $\gamma_M$ . Qual'è l'intervallo massimo di definizione?

**Esercizio 7.** Calcolare la curvatura geodetica di una retta a  $45^\circ$  rispetto all'asse  $x$  nel modello del semipiano di  $\mathbb{H}^2$ .

**Esercizio 8.** Calcolare le curvature del grafico della funzione  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y) = \sin x \cos y$$

**Esercizio 9.** Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ .

**Esercizio 10.** Calcolare le curvature di  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ .

**Esercizio 11.** Sia  $\circ$  il prodotto di Kulkarni-Nomizu. Dimostrare che in dimensione tre si ha:

$$R = \frac{\text{scal}}{12} g \circ g + \left( \text{Ric} - \frac{\text{scal}}{3} g \right) \circ g$$

ove  $g$  è la metrica e  $R$  è il Riemann.