1. Algebra multilineare

1.1. **Prodotto tensoriale.** Il prodotto tensoriale di due spazi vettoriali V e W è definito come l'unico spazio vettoriale X (a meno di isomorfismi) tale che esista un'applicazione bilineare $\beta : V \times W \to X$ tale che per ogni spazio Y e per ogni applicazione bilineare $b : V \times W \to Y$ esista un'unica applicazione lineare $h : X \to Y$ tale che $b = h \circ \beta$.

Unicità: Chiaramente β è surgettiva, altrimenti si perde l'unicità della h e lo stesso vale per β'. Se X e X' sono due tali spazi allora esitono $h : X \to X'$ ed $h' : X' \to X$ tali che $\beta' = h\beta$ e $\beta = h'\beta'$ da cui $\beta = h'h\beta$ per cui $h'h = Id$ e X ed X' risultano isomorfi.

Esistenza: Siano (v_i) e (w_j) basi di V e W. Ogni applicazione bilineare b è determinata dai valori $b(v_i, w_j)$ per cui se definiamo X come lo spazio generato dai simboli $v_i \otimes w_j$ e definiamo $\beta(\sum a_i v_i, \sum b_j w_j) = \sum a_i b_j v_i \otimes w_j$, abbiamo finito. Infatti, se $b : V \times W \to Y$ è bilineare l'applicazione h è univocamente determinata da $h(v_i \otimes w_j) = b(v_i, w_j)$.

Il prodotto tensoriale di V e W si indica con $V \otimes W$. Tale prodotto è commutativo e associativo. Indichiamo con $\bigotimes^p V$ il prodotto tensoriale di V con sé stesso p volte.

Se $v \in \bigotimes^p V$ e $w \in \bigotimes^q V$ il loro prodotto $v \otimes w \in \bigotimes^{p+q} V$ è definito nel modo ovvio sui monomi di base come $(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}) \otimes (v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}) = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_q}$ e poi esteso naturalmente per bilinearità.

Intuitivamente, il prototto tensoriale si può pensare così: si fa il prodotto matriciale tra il vettore colonna v ed il vettore riga w ottenendo una matrice. Ed in effetti in dimensione finita si può identificare $V \otimes W$ con lo spazio delle matrici ove $v_i \otimes w_j$ corrisponde alla matrice che ha 1 al posto (i, j) e zero altrove.

1.2. **Prodotto esterno.** Lo si può definire prendendo la parte antisimmetrica del prodotto tensoriale, definendo $v_i \wedge w_j = (v_i \otimes w_j - w_j \otimes v_i)/2$ e poi prendendone lo spazio generato. Ma lo si può definire con la proprietà universale delle applicazioni bilineari alternanti.

Il prodotto esterno di V con W, che si indica con $V \wedge W$, è l'unico spazio X (a meno di isom) tale che esista una applicazione bilineare alternante $\alpha : V \times W \to X$ tale che per ogni spazio Y e per ogni applicazione bilineare alternante $b = V \times W \to Y$ esista un'applicazione lineare $h : X \to Y$ tale che $b = h \circ \alpha$.

Lo spazio $\wedge^p V$ e le applicazioni $\wedge : \wedge^p V \times \wedge^q V \to \wedge^{p+q} V$ sono definite nel modo ovvio. Se $v \in \wedge^p V$ e $w \in \wedge^q V$ abbiamo $v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v$.

Indichiamo nel modo solito con V^* il duale di V. Se $f_1, \ldots, f_p \in V^*$ e $v_1, \ldots, v_p \in V$, ponendo $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)[v_1 \wedge \cdots \wedge v_p] = \det(f_i(v_j))$ si ottiene un isomorfismo tra $(\wedge^p V)^*$ e $\wedge^p(V^*)$.

In oltre, se abbiamo una forma bilineare b su V se ne ottiene una su $\wedge^p V$ ponendo $b(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) = \det(b(v_i, w_j))$. Tale forma è un prodotto scalare se b lo era su V.

1.3. **Determinanti.** Il prodotto $\wedge^p V^*$ non è altro che lo spazio delle forme p-lineari alternanti su V, cioè funzioni su V^p che siano lineari in ogni entrata e tali che scambiando due entrate il risultato cambi di segno. Se (v_i) è una base di V e v^i la base duale, in coordinate la forma $v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_p}[V_1, \ldots, V_p]$ è il determinante della matrice quadrata $p \times p$ $(V_k^{i_k})$. In pratica, si scrivono i vettori V_i in coordinate rispetto alla base v_i, si costruisce la matrice che ha tali coordinate come colonne e si prende il minore ottenuto scegliendo le righe $i_1, \ldots, i_p$.

I determinanti sono una base delle p-forme.

1.4. **Notazioni per il calcolo differenziale.** In coordinate su $\mathbb{R}^n$ la base canonica si indica con ∂_i o equivalentemente con $\frac{\partial}{\partial x_i}$ e la base duale si indica con dx^i. La scrittura $dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}$ è equivalente, se non ci sono ambiguità (tipo dovute a integrazioni presenti nel discorso,) alla scrittura $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. Una base delle p-forme è costituita dai monomi $dx^{i_1} \ldots dx^{i_p}$ a patto che si scelgano gli indici in modo crescente (ricordare che $dxdy = -dydx$.) Un multiindice è una stringa ordinata di indici $(i_1, \ldots, i_p)$ con $i_1 < \cdots < i_p$. La dimensione di I è il numero $|I| = p$.

La scrittura dx^I è equivalente alla scrittura $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.

1.5. **Pull-back.** Sia $A : V \to W$ un'applicazione lineare e sia ω una p-forma su W. Il pull-back $A^*\omega$ si definisce mediante la formula

$$A^*\omega(v_1, \ldots, v_p) = \omega(Av_1, \ldots, Av_p).$$

Chiaramente il pull-back è un operatore lineare da $\wedge^p(W^*) \to \wedge^p(V^*)$. Dati due multiindici I, J entrambi di dimensione p, se indichiamo con $\det_I^J A$ il determinante del minore di A ottenuto scegliendo I righe e J colonne, si ha

$$A^* dx^I = \sum_{|J|=p} \det A_I^J dx^J$$

e la formula generale è data per linearità. È facile controllare che $A^*(\omega \wedge \eta) = A^*\omega \wedge A^*\eta$.

2. Forme differenziali su $\mathbb{R}^n$ e su varietà (definizione in coordinate)

2.1. **Forme e campi su $\mathbb{R}^n$.** La geometria differenziale su M non è altro che algebra lineare fatta punto per punto sullo spazio tangente ad M. In $\mathbb{R}^n$ c'è un'identificazione canonica con $T_x\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^n$ che non dipende dal punto x per cui tutto è più facile (o difficile, a seconda dei punti di vista.)

Una p-forma differenziale su $\mathbb{R}^n$ è una funzione ω da $\mathbb{R}^n$ a valori nelle vorme p-lineari alternanti su $\mathbb{R}^n$. In coordinate rispetto alla base canonica

$$\omega = \sum_{|I|=p} a_I(x) dx^I$$

ove le a_I sono funzioni nella classe scelta per lavorare, usualmente $\mathcal{C}^\infty$. L'insieme delle p-forme differenziali su M è spesso indicato in letteratura col simbolo $\Omega^p(M)$.

Un campo di vettori su $\mathbb{R}^n$ è una funzione X da $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$. In coordinate $X = (a^1, \dots, a^n) = \sum_i a^i \partial_i$.

Se $X_1, \dots, X_p$ sono p campi di vettori allora si può calcolare $\omega[X_1, \dots, X_p]$ punto per punto ottenendo una funzione

$$\omega[X_1, \dots, X_p](x) = \sum_{|I|=p} a_I(x) \det{}_I[X_1, \dots, X_p]$$

ove $\det I$ indica il determinante del minore ottenuto scegliendo I righe.

2.2. **Pull-back e push-forward.** Se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è una funzione differenziabile e se ω è una p-forma su $\mathbb{R}^k$ si definisce il pull-back di ω, che è una p-forma su $\mathbb{R}^n$, come

$$\phi^*\omega[X_1, \dots, X_p](x) = \omega[d\phi X_1, \dots, d\phi X_p](\phi(x))$$

per ogni scelta di campi $X_i, \dots, X_p$ su $\mathbb{R}^n$. In coordinate vale una formula analoga al caso del pull-back con applicazioni lineari.

Se ϕ è un diffeomorfismo, si definisce il push-forward come il pull-back dell'inversa.

In modo analogo, se ϕ è un diffeomorfismo si definisce il push-forward di un campo X come

$$\phi_* X(y) = d\phi[X(\phi^{-1}(y))]$$

ed il pull-back come il push-forward dell'inversa. Sia per le forme che per i campi vale

$$\phi^*\phi_* = \phi_*\phi^* = Id$$

ed in oltre

$$\phi^*\omega[X_1, \dots, X_p] = \omega[\phi_* X_1, \dots, \phi_* X_p].$$

2.3. **Forme e campi su varietà, definizione in coordinate.** Sia M una varietà differenziabile munita di atlante $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ove (U_α) è un ricoprimento aperto localmente finito e φ_α da U_α ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ è una carta locale.

Una p-forma ω su M è il dato di p-forme ω_α su $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ tali che $\omega_\alpha = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* \omega_\beta$ su $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Un campo di vettori X su M è il dato di campi X_α su $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ tali che $X_\beta = (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_* X_\alpha$ su $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

2.4. **Integrazione.** Se $\omega = f(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ è una n-forma su $\mathbb{R}^n$, l'integrale di ω su $\mathbb{R}^n$ è definito come l'integrale usuale $\int f(x)\,dx_1 \dots dx_n$.

Sia ora M una varietà orientata, cioè munita di un atlante $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ localmente finito i cui cambi di carta siano tutti con Jacobiano positivo. Una partizione dell'unità subordinata a (U_α) è una famiglia di funzioni differenziabili f_α su M tali che:

- $0 \leq f_\alpha \leq 1$
- $\sum_\alpha f_\alpha = 1$
- Il supporto di f_a sia contenuto in U_α.

Data una partizione dell'unità, avendo $\omega = \sum f_\alpha \omega$, si definisce l'integrale di ω su M come

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M f_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} f_\alpha \omega_\alpha.$$

Tale definizione non dipende dalla partizione dell'unità scelta in quanto si verifica che vale la somma a segni alterni

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \omega - \sum_{\alpha \neq \beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \omega + \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} \int_{U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma} \omega - \dots$$

Infine, se (U_α) e (V_β) sono due ricoprimenti di due atlanti differenziabili compatibili e con la stessa orientazione, allora ogni partizione dell'unità subordinata a (U_α) si estente ad una partizione dell'unità subordinata a $(U_\alpha) \cup (V_\beta)$ definendo $f_\beta = 0$. E viceversa. Da cui si deduce che $\int_M \omega$ non dipende dall'atlante scelto.

Se $f : M \to N$ è un embedding di una k-varietà in una n-varietà e ω è una k-forma su N, si definisce l'integrale di ω su M come $\int_M f^* \omega$.

3. Differenziazione

3.1. **Differenziale.** Il differenziale di una k-forma $\omega = \sum_I a_I dx^I$ su $\mathbb{R}^n$ è definito da

$$d\omega = \sum_I \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

e sulle varietà in coordinate mediante la stessa formula.

Il differenziale di una funzione f vista come una 0-forma risulta quindi

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

e coincide col differenziale usuale di funzioni.

Dal teorema di Schwarz sulle derivate in croce segue immediatamente che $d \circ d = 0$, ossia per ogni forma si ha

$$d(d\omega) = 0$$

(questo non sarà più vero in generale per altri metodi di fare le derivate, tipo la derivazione covariante per sezioni di fibrati, su cui derivando due volte compare il tensore di curvatura...)

Facili conti in cui l'unica difficoltà è rappresentata da errori di segno mostrano che il differenziale commuta col pull-back

$$d\phi^*\omega = \phi^* d\omega$$

e che se ω è una k-forma, vale la regola del prodotto

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \eta$$

3.2. **Operatore di omotopia e costruzione del cilindro.** Siano A, B due operatori lineari da $\Omega^k(M)$ a $\Omega^k(N)$. Un operatore di omotopia tra f e g è un operatore lineare $K : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(N)$ tale che

$$A - B = Kd + dK$$

Se $f, g : N \to M$ sono mappe differenziabili e $\varphi : N \times [0,1] \to M$ è un'omotopia differenziabile tra f e g, allora esiste un operatore di omotopia tra f^* e g^*. Dimostriamo questo fatto. Definiamo K come

$$K(\omega)_x[V_1, \ldots, V_{k-1}] = \int_{x \times [0,1]} \varphi^*\omega[\partial_t, V_1, \ldots, V_{k-1}]dt$$

K è ovviamente lineare e quindi possiamo fare i conti su una base delle p-forme. La forma $\varphi^*\omega$ in coordinate si scrive come somma di monomi $a_I dx^I$ ove I può essere di due tipi: $i_1 = 1$, o no. In altre parole ci sono due tipi di monomi, quelli del tipo $dtdx^I$ con $|I| = k-1$ e quelli senza dt, del tipo dx^I con $|I| = k$. Facendo il conto con cura nei due casi si ottiene il risultato voluto.

3.3. **Lemma di Poincaré.** Una forma ω si dice chiusa se $d\omega = 0$, si dice esatta se esiste una forma α tale che $\omega = d\alpha$. Abbiamo visto che se ω è esatta allora è chiusa. Il lemma di Poincaré dice che in un dominio omotopicamente equivalente a un punto, come lo è $\mathbb{R}^n$, vale il contrario. Esempio: su S^1 la forma $d\theta$ è chiusa ma non è estatta.

Dimostrazione del lemma. Sia D un dominio omotopicamente equivalente a un punto e sia $\varphi : D \times [0,1] \to D$ un'omotopia tale che $\varphi(x,1) = x$ e $\varphi(x,0) = p$ ove p è un punto di D. In $\mathbb{R}^n$ si può scegliere l'omotopia $\varphi(x,t) = tx$ (in questo caso $p = 0$.)

Sia K l'operatore di omotopia associato a φ. Siccome $\varphi(x,0) = 0$, il pull-back di una forma a livello $t = 0$ è nullo per qualsiasi forma. Mentre per come è definita φ, a livello $t = 1$ il pull-back di ω è ω stessa. Per cui per ogni forma ω si ha

$$\omega = d(K\omega) - K(d\omega)$$

da cui si deduce che se $d\omega = 0$ allora ω è esatta.

4. Il teorema di Stokes

4.1. **Varietà con bordo.** Una varietà di dimensione $n+1$, è definita da un atlante $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ in cui le carte locali hanno immagine su aperti di

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 \geq 0\}$$

e i cambi di carta appartengono a $Diff(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mathbb{R}^{n+1}_+)$. M è orientata se i cambi di carta son tutti a Jacobiano positivo. Il sottoinsieme di M corrispondente al bordo di $\mathbb{R}^{n+1}_+$, che è

$$\mathbb{R}^n_0 = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : x_0 = 0\}$$

si chiama bordo di M e si indica con ∂M. La restrizione a ∂M delle carte dell'atlante di M fornisce un atlante naturale di ∂M che eredita da M una struttura di varietà differenziabile di dimensione n.

Se M è orientata allora il suo bordo eredita un'orientazione naturale: Una base di $T\partial M$ sarà dichiarata positiva se la base di TM ottenuta aggiungendo come PRIMO vettore di base la normale ESTERNA a ∂M è positiva. Per cui il bordo del disco nel piano orientato come d'abitudine sarà orientato in modo che antiorario e l'orientazione di $\mathbb{R}^n_0$ come bordo di $\mathbb{R}^{n+1}_+$ sarà l'inversa di quella standard ($\mathbb{R}^n_0$ sta "sotto" a $\mathbb{R}^{n+1}_+$.)

4.2. **Dimostrazione del teorema di stokes.** Se M è una $k+1$-varietà con bordo (che potrebbe anche essere vuoto) e ω è una k-forma su M vale la meravigliosa relazione

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlante per M a valori in $\mathbb{R}^{k+1}_+$. Possiamo supporre senza perdere generalità che ogni U_α sia a chiusura compatta. Sia f_α una partizione dell'unità subordinata a (U_α). Abbiamo $\omega = \sum_\alpha f_\alpha \omega$. Siccome la formula che vogliamo dimostrare è lineare, basta dimostrarlo per le forme $f_\alpha \omega$ ossia basta dimostrarlo per una forma che sia a supporto compatto contenuto in U_α. In coordinate questo vuol dire che basta dimostrare il teorema per k-forme a supporto compatto in $\mathbb{R}^{k+1}_+$. Una tale forma si scrive come

$$\omega = \sum_i a_i(x) dx^0 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^k$$

Sia $C = [0, L] \times [-L, L]^k$ un mezzo cubo in $\mathbb{R}^{k+1}_+$, di centro zero e lato L abbastanza grande in modo da contenere il supporto di ω cosí che

$$\int_{\mathbb{R}^{k+1}_+} \omega = \int_C \omega$$

$$d\omega = \sum_i (-1)^i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx^0 \ldots dx^k$$

Per linearità basta fare il conto monomio per monomio. Dal teorema del calcolo integrale segue che

$$\int_C d\omega = \int_C \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_0 \dots dx_k$$

$$= \int a_i(x_0, \dots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, \dots x_k) dx_0 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k$$

$$- \int a_i(x_0, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}) dx_0 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k$$

e tale integrale è nullo se $i > 0$ perchè C contiene il supporto di ω mentre per $i = 0$ otteniamo

$$-\int_{R_0^k} \omega = \int_{\partial \mathbb{R}_+^{k+1}} \omega$$

4.3. **Rotori divergenze etc...** In fisica un campo di vettori in $\mathbb{R}^3$ con coordonate (A, B, C) lo si considera come 1-forma o 2-forma a seconda che si voglia farne la circuitazione o il flusso. Il differenziale di tali forme sono appunto rotori e divergenze. Se

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

allora

$$d\omega = (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}) dydz - (\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}) dxdz + (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}) dxdy$$

che è il rotore visto come 2-forma, da cui stokes ci dice che la circuitazione è come il flusso del rotore.

Mentre se

$$\omega = Adydz - Bdxdz + Cdxdy$$

allora

$$d\omega = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$$

da cui stokes ci dice che il flusso è l'integrale della divergenza. Ed infine ritroviamo che la divergenza del rotore è zero.

5. Forme e campi, definizioni formali

5.1. **Campi.** Su una varietà anellata un campo è per definizione una derivazione. Volendo ci si può restringere a sottomoduli del modulo delle derivazioni, per esempio se si considerano solo i campi tangenti a una foliazione data.

In termini di fibrati, su una varietà differenziabile un campo di vettori è una sezione del fibrato tangente

$$X \in \Gamma(TM).$$

Sui campi è quindi ben definito il commutatore $[X, Y]$.

5.2. **Forme.** Una k-forma è un è un'applicazione p-lineare alternante da D^p in $\mathcal{A}$. Ove D è il modulo delle derivazioni e $\mathcal{A}$ è l'anello in questione. Per le varietà differenziabili $\mathcal{A}$ è l'anello delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ e $D = \Gamma(TM)$.

Il modulo delle p-forme si indica con A^p. In termini di fibrati, una p-forma su una varietà differenziabile è una sezione del fibrato $\wedge^p(TM^*)$

$$\omega \in \Gamma(\wedge^p TM^*).$$

Se E è un $\mathcal{A}$-modulo, l'anello delle forme p-lineari alternanti a valori in E si indica con $A^p(E)$.

5.3. **Differenziale.** Nel caso di forme a valori in $\mathcal{A}$ si può definire il differenziale in modo che abbia le usuali proprietà descritte per il differenziale delle forme in $\mathbb{R}^n$ definito in coordinate.

Teorema. Se ω è una k-forma in $\mathbb{R}^n$ allora

$$d\omega[X_0, \dots, X_k] = \sum_i (-1)^i X_i(\omega[X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots X_k])$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k)$$

La dimostrazione è un conto in coordinate in cui bisogna stare attenti a non perdersi con gli indici.

Questa formula, che vale per il differenziale di forme in $\mathbb{R}^n$, ha il pregio che non dipende dalle caratteristiche differenziali di $\mathbb{R}^n$ ma solo dal fatto che si possa fare il commutatore tra due derivazioni. Quindi, nel caso generale tale formula si usa per definire il differenziale $d\omega$.

Vale $d \circ d = 0$.

6. Teorie di (Co)-homologia

6.1. **Coomologia di De Rham.** Il differenziale non è un operatore lineare se consideriamo le forme come modulo sulle funzioni liscie:

$$d(f\omega) = df\omega + fd\omega$$

mentre lo è se consideriamo le forme come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Lo spazio vettoriale delle p-forme su M, si denota con $\Omega^p(M)$. Abbiamo quindi la successione di applicazioni lineari

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Per ogni p si definisce lo spazio vettoriale dei p-cicli come l'insieme delle forme chiuse ossia il nucleo del differenziale

$$Z^p(M) = \{\omega \in \Omega^p(M) :\ d\omega = 0\}$$

e lo spazio dei p-bordi come l'immagine del differenziale ossia le forme esatte

$$B^p(M) = \{d\alpha :\ \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\}$$

ed il p-esimo gruppo di co-homologia di de Rham, che in realtà è uno spazio vettoriale, come cicli modulo bordi:

$$H^p_{DR}(M) = Z^p(M)/B^p(M)$$

Si considera spesso la somma diretta di tutti questi spazi

$$\Omega(M) = \bigoplus_i \Omega^i(M) \qquad Z(M) = \bigoplus_i Z^i(M) \qquad B(M) = \bigoplus_i B^i(M)$$

$$H_{DR}(M) = Z(M)/B(M) = \bigoplus_i H^i_{DR}(M)$$

Tutto ciò si può trattare in modo astratto dando origine a una teoria generale dell'omologia.

6.2. **Complessi di cocatene.** Un complesso è uno spazio vettoriale X dotato di un operatore lineare $d : X \to X$, detto differenziale o anche operatore di bordo, tale che $d \circ d = 0$. Si possono considerare anche complessi di gruppi o anelli, ma qui per semplicità ci restringiamo al caso di spazi vettoriali. Tutto quello che diciamo per spazi vettoriali vale *mutatis mutandi* per i complessi di gruppi o anelli.

In genere, un complesso è graduato, cioè

$$X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X_i$$

e d è omogeneo di grado k, cioè

$$d : X_i \to X_{i+k}$$

Un complesso si dirà complesso di cocatene se d ha grado 1 e complesso di catene se d ha grado -1.

Esempio: il complesso delle forme con il differenziale è un complesso di cocatene (onde si pone $X_i = 0$ per $i < 0$.) In tutto quello che segue il lettore che desidera avere un riferimento più tangibile di quello che si dirà, può sostituire ogni complesso con il complesso delle forme su una varietà.

Per semplicità nel seguito ci restringeremo ai soli complessi di cocatene (ossia il differenziale avrà sempre grado 1.)

Una mappa tra complessi è un'applicazione lineare che commuta col bordo. Se (A, d_A) e (B, d_B) sono complessi si deve quindi richiedere $\phi \circ d_A = d_B \circ \phi$. Un altro modo per dire la stessa cosa è richiedere che il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d_A"] & B \arrow[d, "d_B"] \\ A \arrow[r, "\phi"] & B \end{tikzcd}$$

In genere se i complessi sono graduati ϕ si richiede essere omogenea di un certo grado. Nel seguito le mappe tra complessi graduati saranno sempre omogene di grado zero e cioè, per esempio se A e B sono complessi di cocatene, per ogni i vale

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "d"] & B_i \arrow[d, "d"] \\ A_{i+1} \arrow[r, "\phi"] & B_{i+1} \end{tikzcd}$$

Esempi: se $f : M \to N$ è liscia, il pull-back $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ è una mappa tra complessi di cocatene. Se $A \subset M$ è una sottovarietà (per esempio un aperto di M) allora la restrizione di una forma $\omega \to \omega|_A$ fornisce una mappa di complessi di cocatene $\Omega(M) \to \Omega(A)$.

6.3. **Successioni esatte.** Una successione di spazi

$$\dots \overset{f_{p-2}}{\to} A_{p-1} \overset{f_{p-1}}{\to} A_p \overset{f_p}{\to} A_{p+1} \overset{f_{p+1}}{\to} \dots$$

ove ogni f_i è un'applicazione lineare, si dice esatta in A_p se $\ker(f_p) = \mathrm{Im}(f_{p-1})$, una successione esatta lunga è una sucessione esatta in ogni punto. La stessa definizione vale per successioni di complessi ove gli A_i sono complessi ed le f_i morfismi di complessi. Se i complessi son graduati le f_i sono richieste essere omogenee.

Dato un complesso A di cocatene

$$\dots \overset{d}{\to} A_{p-1} \overset{d}{\to} A_p \overset{d}{\to} A_{p+1} \overset{d}{\to} \dots$$

l'omologia di A è il complesso $H(A)$ definito da $\ker(d)/\mathrm{Im}(d)$ come nel caso delle p-forme. L'omologia misura quindi quanto un complesso non sia esatto. La terminologia è la solita: i cicli sono gli elementi a bordo nullo e i bordi sono l'immagine dell'operatore di bordo.

Teorema: data una applicazione ϕ tra due complessi di cocatene A e B, l'applicazione $\phi_*([a]) = [\phi(a)]$ è ben definita e definisce un morfismo tra $H(A)$ e $H(B)$ dello stesso grado di ϕ. La dimostrazione è solo la verifica che se ϕ è un'applicazione tra complessi manda cicli in cicli e bordi in bordi.

Una **successione esatta corta** è una successione esatta

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

la definizione si applica sia ai complessi che agli spazi (che ai gruppi, anelli etc...) In una successione esatta corta $B \to C$ è surgettiva (per esattezza in C) e $A \to B$ è iniettiva (per esattezza in A) ed in B vale l'esattezza: ciò che va a zero in C è esattamente ciò che proviene da A.

Esempi:

$$0 \to A \to B \to B/A \to 0$$

$$0 \to A \to A \oplus C \to C \to 0$$

la prima ha senso ogni volta che si può fare il quoziente, tipo se A è un sottogruppo normale di B, la seconda ha senso per gli spazi vettoriali.

Teorema: se A, B, C sono spazi vettoriali e $0 \to A \to B \to C \to 0$ è una successione esatta corta allora $B \simeq A \oplus C$. La dimostrazione è elementare per gli spazi di dimensione finita e in generale dipende dal fatto che il $\ker$ di una roba lineare è un sottospazio chiuso.

6.4. **Lemma del triangolo esatto.** Sia $0 \to A \to B \to C \to 0$ una successione esatta corta di cocatene (o di complessi graduati tutti col differenziale dello stesso grado k) allora la successione indotta

$$H(A) \to H(B) \to H(C)$$

è esatta in $H(B)$, in oltre esiste un'applicazione di complessi $\delta : H(C) \to H(A)$ di grado 1 (in generale dello stesso grado k dei differenziali) tale che il triangolo

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr] & & H(B) \arrow[dl] \\ & H(C) \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

sia esatto in ogni punto. Ciò equivale a chiedere che

$$\dots H_i(B) \to H_i(C) \xrightarrow{\delta} H_{i+1}(A) \to H_{i+1}(B) \to H_{i+1}(C) \xrightarrow{\delta} H_{i+2}(A) \dots$$

sia una successione esatta lunga.

6.5. **Diagram surfing.** Molti risultati sui complessi si dimostrano con la tecnica del diagram surfing, che consistere nello scrivere un diagramma commutativo gigante spesso con proprietà aggiuntive sui morfismi, e trarre le conclusioni volute "passeggiando" sul diagramma su cammini equivalenti. Diamo come esempio di questa tencnica la definizione del morfismo δ ed alcune delle sue proprietà lasciando il lettore libero di surfare a suo piacimento per completare la dimostrazione del lemma del triangolo esatto.

Dotiamoci di un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B \arrow[r] \arrow[d, "d"] & C \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B \arrow[r] \arrow[d, "d"] & C \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

l'informazione supplementare qui è che le righe sono esatte. Sia c un ciclo di C. Pensatelo in alto a destra. Siccome c è un ciclo $dc = 0$ siccome le righe sono esatte c proviene da un elemento b. Partendo da b andiamo in basso a destra in due modi, dalla commutatività e dal fatto che $dc = 0$ otteniamo che db è un elemento che va a zero in C. Per esattezza delle righe, tale elemento proviene da un elemento a di A. Poniamo $\delta[c] = [a]$. (Praticamente si prende c si rimonta su B, se ne fa il bordo e si rimonta su A, questo è il motivo per cui δ ha lo stesso grado di d.)

Vediamo che tale applicazione è ben definita. In primis si verifica che $da = 0$. Andando in basso a destra a partire da a finiamo nell'elemento ddb che è ovviamente nullo. Per esattezza in A la freccia $A \to B$ è iniettiva, per cui da deve essere zero.

Se avessimo scelto un altro elemento b' al primo passo, avremmo che $b-b'$ va a zero mandato in C (entrambi hanno c come immagine.) Per esattezza della riga, esiste quindi un unico elemento α che sia la preimmagine in A di $b - b'$. Ne segue adesso facilmente che se a' è la preimmagine di db' si ha $a - a' = d\alpha$ e quindi la classe di coomologia di $\delta(c)$ non dipende dalla scelta di b. Analogamente si dimostra che non dipende dalla scelta del ciclo rappresentante $[c]$.

La dimostrazione del lemma del triangolo esatto procede tutta cosí, surfando il diagramma. Per esemplificare ancora proviamo un pezzo dell'esattezza in $H(C)$ del triangolo che può risultare un po' ostico al surfista principiante. Dimostriamo che se un ciclo $[c] \in H(C)$ va in zero in $H(A)$ allora proveniva da un elemento di $H(B)$. La dimostrazione sbagliata è: ovvio perchè per esattezza delle righe la freccia $B \to C$ è surgettiva. Dire che $[c]$ proviene da un elemento di $H(B)$ significa dire che esiste un ciclo b in B tale che $b \to c$ e cioè che tra tutte le preimmagini di c (che a priori sono molte) ce n'è una con $db = 0$.

Partiamo dal solito c in alto a destra, prendiamo una preimmagine b che sappiamo esistere per estattezza, calcoliamo db che non ha nessun motivo di essere nullo e prendiamo una sua preimmagine a. Se $\delta([c])$ è zero in $H(A)$ allora a è un bordo. Per cui esiste $\alpha \in A$ tale che $a = d\alpha$. L'immagine di α in B la chiamiamo β e per esattezza l'immagine di β in C è nulla per cui l'elemento $b - \beta$ è una preimmagine di c. Dalla commutatività segue adesso che $d\beta = db$ per cui $d(b - \beta) = 0$ come richiesto.

6.6. **Il Lemma dei 5.** Se in un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & B_2 \arrow[r, "\psi_2"] & B_3 \arrow[r, "\psi_3"] & B_4 \arrow[r, "\psi_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

le righe sono esatte e f_1, f_2, f_4, f_5 sono isomorfismi, allora anche f_3 lo è. La dimostrazione di iniettività e surgettività della f_3 si fanno surfando (con cura) nel diagramma come nella dimostrazione qua sotto.

Lemma dei 5 modificato. Se il diagramma non è completamente commutativo, ma commutativo a meno del segno, allora il lemma dei 5 vale ugualmente. Dimostrazione: sia $x_3 \in A_3$ tale che $f_3(x_3) = 0$ e sia x_4 la sua immagine in A_4. Per commutatività a meno del segno abbiamo $f_4(x_4) = \pm\psi_3(f_3(x_3)) = \pm(\psi_3(0)) = 0$. Siccome f_4 è iso, allora $x_4 = 0$. Per esattezza in A_3 esiste x_2 tale che $\varphi_2(x_2) = x_3$. Per commutatività a meno del segno abbiamo $\psi_2(f_2(x_2)) = \pm f_3(\varphi_2(x_2)) = \pm f_3(x_3) = 0$. Per esattezza in B_2 esiste $y_1 \in B_1$ tale che $\psi_1(y_1) = f_2(x_2)$. Sia $x_1 = f_1^{-1}(y_1)$. Per commutatività a meno del segno abbiamo $\varphi_1(x_1) = \pm x_2$ per cui $x_3 = \varphi_2(\varphi_1(\pm x_1)) = 0$ per esattezza in A_2 e quindi f_3 risulta iniettiva. La surgettività si fa in modo analogo alla dimostrazione dell'esattezza in $H(C)$ nel lemma del triangolo esatto, tenendo presente i segni.

7. Calcolo della coomologia di De Rham per varietà

7.1. Successione di Mayer-Vietoris. Teorema: sia M una varietà con un ricoprimento aperto $M = A \cup B$, detto $C = A \cap B$ si ha la seguente successione esatta corta

$$0 \to \Omega(M) \to \Omega(A) \oplus \Omega(B) \to \Omega(C) \to 0$$

ove le frecce son date dalle restrizioni come segue

$$\omega \to (\omega|_A, \omega|_B) \qquad (\alpha, \beta) \to \alpha|_C - \beta|_C.$$

La dimostrazione è pressoché ovvia considerando una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento dato da A e B. Vediamo la surgettività di $\Omega(A) \oplus \Omega(B) \to \Omega(C) \to 0$. Sia $\{\varphi_A, \varphi_B\}$ una partizione dell'unità e sia $\omega \in \Omega(C)$. Allora $\omega = \varphi_A\omega + \varphi_B\omega$. Ma è chiaro che $\varphi_A\omega \in \Omega(B)$ e $\varphi_B\omega \in \Omega(A)$ (notare che A e B si sono "scambiati".)

Come corollario del lemma del triangolo esatto si ottiene la successione esatta lunga, detta di Mayer-Vietoris

$$0 \to H^0_{DR}(M) \to H^0_{DR}(A) \oplus H^0_{DR}(B) \to H^0_{DR}(C) \to H^1_{DR}(M) \to$$

$$\to H^1_{DR}(A) \oplus H^1_{DR}(B) \to H^1_{DR}(C) \to H^2_{DR}(M) \to H^2_{DR}(A) \oplus H^2_{DR}(B) \to$$

$$\to H^2_{DR}(C) \to H^3_{DR}(M) \to \dots$$

Insieme al lemma dei 5 la successione di Mayer-Vietoris è lo strumento principe per calcolare i gruppi di co-omologia: Per il lemma di Poincaré l'omologia dei pezzi contrattili la si conosce. In generale si fa per induzione sulla "semplicità" e sul grado: si divide M in pezzi semplici di cui l'omologia si conosce, per cui $H^i(M)$ a destra e sinistra ha due elementi che si conoscono, il centrale viene di conseguenza.

Esempio/Esercizio: si calcoli la coomologia della sfere S^n. Si calcoli la coomologia del toro ed in generale della superficie orientabile di genere g.

7.2. **Coomologia a supporto compatto.** Sia M una varietà differenziabile. Si indica con $\Omega_c^p(M)$ l'anello delle p-forme a supporto compatto su M. Chiaramente $\Omega_c^p(M) \subset \Omega^p(M)$ e l'operatore di bordo manda forme a supporto compatto in forme a supporto compatto. L'omologia del complesso

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega_c^{p-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^p(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

si denota con $H_c^i(M)$ e si chiama coomologia a supporto compatto.

7.3. **Mayer-Vietoris a supporto compatto.** Sia $X \subset M$ un aperto. La restrizione a X di una forma a supporto compatto su M non è necessariamente a supporto compatto. Mentre l'inclusione $\Omega_c^p(X) \to \Omega_c^p(M)$ è ben definita. La conseguenza di ciò è che la Mayer-Vietoris si ribalta. Infatti, ad essere esatta è la successione

$$0 \to \Omega_c(C) \to \Omega_c(A) \oplus \Omega_c(B) \to \Omega_c(M) \to 0$$

ove le frecce son date dalle inclusioni come segue

$$\omega \to (\omega, -\omega) \qquad (\alpha, \beta) \to \alpha + \beta.$$

Di conseguenza dal lemma del triangolo estatto si ottiene la successione esatta lunga detta di Mayer-Vietoris a supporto compatto.

7.4. **Dualità.** Dato uno spazio vettoriale (o un modulo) A, si denota il suo duale con A^*. L'applicazione di dualità tra un elemento $a \in A$ ed $f \in A*$ verrà denotata con

$$f(a) = \langle f, a \rangle.$$

Ogni costruzione naturale si può dualizzare. In particolare, data un'applicazione $F : A \to B$ si ottiene un'applicazione $F^* : B^* \to A^*$ imponendo che valga la formula

$$\langle F^*(g), a \rangle + \langle g, F(a) \rangle$$

Per esempio, se $d : A^p \to A^{p+1}$ è l'operatore di bordo, l'operatore di bordo duale è definito in modo che valga la formula di stokes

$$\langle \omega, \partial D \rangle = \langle d\omega, D \rangle$$

Data una successione di spazi vettoriali o di complessi

$$\dots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \to \dots$$

Si ha la successione esatta duale in cui si deve solo ricordare che tutte le frecce sono alla rovescia

$$\dots \leftarrow A_{i-1}^* \xleftarrow{f_{i-1}^*} A_i^* \xleftarrow{f_i^*} A_{i+1}^* \leftarrow \dots$$

il che equivale a rovesciare gli indici

$$\cdots \to A^*_{i+1} \xrightarrow{f_i^*} A^*_i \xrightarrow{f_{i-1}^*} A^*_{i-1} \to \ldots .$$

7.5. **Dualità tra coomologia e coomologia a supporto compatto.** Sia M una varietà differenziabile orientata di dimensione n senza bordo (non necessariamente compatta.) Sia $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\eta \in \Omega_c^{n-p}(M)$. Si definisce l'accoppiamento di dualità di ω con η come

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_M \omega \wedge \eta$$

tale integrale essendo ben definito in quanto una delle due forme è a supporto compatto.

Se $\omega' = \omega + d\alpha$ e se $d\eta = 0$, siccome ∂M è vuoto si ha

$$\int_M \omega' \wedge \eta - \int_M \omega \wedge \eta = \int_M d\alpha \wedge \eta = \int_M d(\alpha \wedge \eta) \pm \alpha \wedge d\eta = \int_{\partial M} \alpha \wedge \eta = 0$$

Per cui tale dualità fornisce un'applicazione

$$H_c^{n-p}(M) \to (H^p(M))^*$$

Dimostreremo che tale applicazione è in realtà un isomorfismo per cui possiamo dire che il duale della coomologia è la coomologia a supporto compatto. Tale dualità è una delle tante manifestazioni della dualità di Poincaré. Per dimostrarlo useremo le successioni di mayer-vietoris per le due teorie, insieme al lemma dei 5 ed un procedimento di induzione sulla semplicità della varietà M.

7.6. **Dualità sulle palle di $\mathbb{R}^n$: Costruzione del cilindro per forme a supporto compatto.** Sia M una varietà differenziabile, sia ϕ una funzione liscia su $\mathbb{R}$ a supporto compatto tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi = 1$ e sia $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ la proiezione. Si definiscono gli operatori

$$\Psi : \Omega_c^{p+1}(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^p(M) \qquad \text{e} \qquad \Phi : \Omega_c^p(M) \to \Omega_c^{p+1}(M \times \mathbb{R})$$

come

$$\Psi(\omega)[V_1, \ldots, V_p] = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega[\partial_t, V_1, \ldots, V_p] dt$$

$$\Phi(\omega) = \phi(t) dt \wedge \pi^* \omega$$

Lemma: $d \circ \Phi = -\Phi \circ d$. Dimostrazione:

$$d(\Phi(\Omega)) = d(\phi dt \wedge \pi^*(\omega) = -\phi dt \wedge d(\pi^*(\omega)) = -\phi dt \wedge \pi^*(d\omega) = -\Phi(d\omega).$$

Lemma: $d \circ \Psi = -\Psi \circ d$. Dimostrazione: Per linearità basta dimostrarlo per i monomi di ω. In coordinate locali, in ω ci sono due tipi di monomi, quelli che contengono dt e quelli senza. Per i monomi del tipo $a_I(t,x) dt dx^I$ il risultato segue dalla portando la derivazione sotto segno di integrale, ed il segno meno viene dal fatto che $\frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx^i dt dx^I = -\frac{\partial a_I}{\partial x_i} dt dx^i dx^I$. Per i monomi del tipo $a_I(t,x) dx^I$

abbiamo $\Phi(a_I(t,x)dx^I) = 0$ e che $\Psi(d(a_I dx^I)) = 0$ segue dal teorema fondamentale del calcolo integrale e dal fatto che ω è a supporto compatto.

L'anticommutazione con gli operatori di bordo implica che sono ben definiti gli omomorfismi Φ_* e Ψ_* sulla coomologia. Siccome $\int \phi = 1$, per ogni $\omega \in \Omega^p_c(M)$ si ha $\Psi(\Phi\omega) = \omega$. Per cui $\Psi_* \circ \Phi_* = Id$ su $H^p_c(M)$. Ciò ancora non basta per dire che Ψ e Φ sono entrambi isomorfismi.

Lemma: Esiste un operatore $K : \Omega^{p+1}_c(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^p_c(M \times \mathbb{R})$ tale che

$$Kd + dK = Id - \Phi \circ \Psi.$$

Dimostrazione: Definiamo $K\omega$ come

$$\begin{aligned}(K\omega)(x,t)[V_1,\dots,V_p] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds \int_{-\infty}^{t} \omega(x,s)[\partial_t, V_1,\dots,V_p]ds \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t} \phi(s)ds \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x,s)[\partial_t, V_1,\dots,V_p]ds \\ = \int_{-\infty}^{t} \omega(x,s)[\partial_t, V_1,\dots,V_p]ds &- \int_{-\infty}^{t} \phi(s)ds \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x,s)[\partial_t, V_1,\dots,V_p]ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} \omega(x,s)[\partial_t, V_1,\dots,V_p]ds - \left(\int_{-\infty}^{t} \phi(s)ds\right) \pi^*\Psi(\omega).\end{aligned}$$

Come al solito, per linearità possiamo fare la verifica che K sia un operatore di omotopia sulle forme monomiali. In coordinate, se ω non contiene il termine dt allora $K\omega = 0$ e quindi anche $dK\omega = 0$. D'altronde, in questo caso anche $\Psi\omega = 0$. Il teorema fondamentale del calcolo integrale ed il fatto che ω sia a supporto compatto ci dicono adesso che $Kd\omega = \omega$ e la formula di omotopia è verificata.

Supponiamo adesso che ω sia della forma $\omega = f(x,t)dtdx^I$. Abbiamo

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i dt dx^I = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt dx^i dx^I$$

$$\begin{aligned}K(d\omega) &= -\sum_i \left(\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x_i} ds\right) dx^i dx^I \\ &+ \sum_i \int_{-\infty}^{t} \phi(s)ds \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x_i} ds\right) dx^i dx^I\end{aligned}$$

ed infine

$$dK(\omega) = \omega + \sum_i \left(\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x_i} ds \right) dx_i dx^I - \phi(t) dt \wedge \pi^* \Psi(\omega)$$
$$- \sum_i \int_{-\infty}^{t} \phi(s) ds \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x,s)}{\partial x_i} ds \right) dx^i dx^I$$

Da cui l'ugualianza cercata.

L'operatore K si usa come gli operatori di omotopia e la sua esistenza implica che $\Phi_* \circ \Psi_* = Id$ su $H^p_c(M \times \mathbb{R})$ per cui adesso possiam concludere che sia Ψ_* che Φ_* siano isomorfismi. In particolare, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema: $H^{p+1}_c(M \times \mathbb{R}) = H^p_c(M)$.

Quindi, ponendo $M = \mathbb{R}^n$, per induzione si ha

Teorema: $H^{p+i}_c(\mathbb{R}^{n+i}) = H^p_c(\mathbb{R}^n)$. Se $p > n$ non ci sono forme differenti da zero per cui $H^p_c(\mathbb{R}^n) = 0$. Se $p < n$ $H^p_c(\mathbb{R}^n) = H^0_c(\mathbb{R}^{n-p}) = 0$ perché non esistono funzioni costanti a supporto compatto su $\mathbb{R}^{n-p}$. Se $p = n$ $H^n_c(\mathbb{R}^n) = H^0_c(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$.

Corollario: Per $\mathbb{R}^n$ vale la dualità di Poincarè:

$$(H^p(\mathbb{R}^n))^* = H^{n-p}_c(\mathbb{R}^n).$$

Nota: l'isomorfismo $H^n_c(\mathbb{R}^n) = H^0_c(\mathbb{R}^0)$ è dato da Ψ^n e quindi non è altro che l'integrazione $\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \langle \omega, 1 \rangle$ e quindi l'isomorfismo tra $(H^p(\mathbb{R}^n))^*$ e $H^{n-p}_c(\mathbb{R}^n)$ è dato proprio dall'accoppiamento di dualità.

7.7. **Ricoprimenti buoni.** Un ricoprimento di aperti localmente finito $\mathcal{U} = U_\alpha$ di una varietà M si dice semplice se ogni intersezione finita di elementi di U è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{U}$ si dirà **buono** se è semplice e se in piú vale la seguente proprietà: per ogni $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ l'aperto

$$\cup_i U_{\alpha_i}$$

è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$. La dimostrazione dell'esistenza di ricoprimenti buoni arbitrariamente fini, che si può fare con l'aiuto di una metrica Riemanniana su M considerando pallette fortemente convesse, esula dagli scopi di queste note.

7.8. **Dualità sulle Varietà di tipo finito.** Una varietà si dice di tipo finito se ammette un ricoprimento finito buono, per esempio se M è la parte interna di una varietà compata (con o senza bordo.)

Sia M una varietà orientata di tipo finito. Allora vale $(H^p_c(M))^* = H^{n-p}_c(M)$.

Dimostriamo l'isomorfismo per induzione sul numero degli aperti di un ricoprimento buono. Su ogni singolo aperto, che è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$, l'isomorfismo è dimostrato nelle pagine precedenti. Supponiamo di essere nella situazione $X = A \cup B$ con $C = A \cup B$ ove per induzione sappiamo che per A, B, C vale l'isomorfismo di dualità. Scriviamo il diagramma con le due successioni esatte lunghe di Mayer-Vietoris, quella della coomologia a supporto compatto e la dualizzata della normale coomologia di De Rham, con i relativi omomorfismi di dualità:

$$\begin{tikzcd} H_c^{n-p}(C) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^{n-p}(A) \oplus H_c^{n-p}(B) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^{n-p}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^{n-p+1}(C) \arrow[d] \\ (H^p(C))^* \arrow[r] & (H^n(A))^* \oplus (H^p(B))^* \arrow[r] & (H^p(X))^* \arrow[r] & (H^{p-1}(C))^* \end{tikzcd}$$

Le frecce verticali corrispondenti a $H(C)$ e $H(A) \oplus H(B)$ sono isomorfismi per ipotesi induttiva, se dimostriamo che il diagramma commuta a meno del segno, per il lemma dei 5 modificato avremo che anche $H_c^{n-p}(X) \to (H^p(X))^*$ è un isomorfismo e la dimostrazione sarà completa (per motivi di spazio nella pagina sono scritti solo 4 colonne del diagramma, che va pensato lungo, tutto intero.)

Vediamolo dettagliatamente, lasciando il resto delle verifiche per esercizio, sul quadrato

$$\begin{tikzcd} H_c^{n-p}(X) \arrow[r, "\delta_c"] \arrow[d, "\alpha"] & H_c^{n-p+1}(C) \arrow[d, "\beta"] \\ (H^p(X))^* \arrow[r, "\delta^*"] & (H^{p-1}(C))^* \end{tikzcd}$$

Sia $\omega \in H_c^{n-p}(X)$ e $\eta \in H^{p-1}(C)$. Per calcolare $\delta_c\omega$ si deve ripercorrere il procedimento della costruzione del triangolo esatto, quindi si prende una partizione dell'unità f_A, f_B subordinata al ricoprimento A, B, si considerano le fomre $\omega_A = f_A\omega$ e $\omega_B = \varphi_B\omega$ e si calcola il loro differenziale:

$$\delta_c\omega = d\omega_A = -d\omega_B$$

per cui, sfruttando che $d\omega = 0$ si ha

$$\langle \beta(\delta_c\omega), \eta \rangle = \int_C d\omega_A \wedge \eta = \int_C (df_A \wedge \omega + f_A d\omega) \wedge \eta = \int_C df_A \wedge \omega \wedge \eta$$

dall'altro lato, se $\theta \in (H^p(X))^*$, per definizione si ha

$$\langle \delta^*\theta, \eta \rangle = \langle \theta, \delta\eta \rangle$$

$\delta\eta$ lo si calcola cosí (sempre dalla costruzione del triangolo esatto): si scrive η come $\eta_A + \eta_B)$, con $\eta_A = f_A\eta$ e $\eta_B = f_B\eta$ si calcolano i differenziali, che sono l'uno l'opposto dell'altro su C, e si prende la forma

$$\delta\eta = \begin{cases} d\eta_A & \text{su } B \\ -d\eta_B & \text{su } A \end{cases}$$

per cui

$$\langle \delta^*(\alpha\omega), \eta\rangle = \langle \alpha\omega, \delta\eta\rangle = \langle \alpha\omega, d\eta_A - d\eta_B\rangle = \int_B \omega\wedge(d\eta_A) - \int_{A\setminus B} \omega\wedge(d\eta_B)$$

siccome $f_B = 0$ su $A \setminus B$, $d\eta_B = 0$ su $A \setminus B$ e similmente $d\eta_A = 0$ su $B \setminus A$. Per cui l'integrale $\int_{A\setminus B}$ è nullo e $\int_B$ è in realtà un integrale su C. Per cui, sapendo che $d\eta = 0$ si ottiene

$$\langle \delta^*(\alpha\omega), \eta\rangle = \int_C \omega \wedge d\eta_A = \int_C \omega \wedge (df_A \wedge \eta + f_A d\eta) = \pm \int_C df_A \wedge \omega \wedge \eta$$

ove il segno $\pm$ dipende dalla parità di $n - p$.

7.9. **Successione esatta di Coppia.** Sia A una sottovarietà chiusa di una varietà compatta e orientata M, per esempio $A = \partial M$. Si definiscono i moduli e complessi delle forme nulle su A

$$\Omega^p(M, A) = \{\omega \in \Omega^p(M) : \omega|_A = 0\}$$

Ogni forma su A si estende ad una forma su M in quanto A possiende un intorno tubolare T diffeomorfo a $A \times \mathbb{R}^{dim(M)-dim(A)}$ che sia propriamente embedded in M, sul quale è facile definire una funzione test φ che sia liscia, a supporto compatto e valga 1 in un intorno di A.

Detto questo, si ha la successione esatta corta

$$0 \to \Omega^p(M, A) \to \Omega^P(M) \to \Omega^p(A) \to 0$$

ove le frecce son date dall'inclusione di $\Omega^p(M, A)$ in $\Omega^p(M)$ e dalla restrizione. La corrispondente successione esatta lunga in omologia si chiama successione esatta di coppia.

Data una forma a supporto compatto su $M \setminus A$, la si può estendere a zero a tutta M ottenendo cosí una forma nulla su A.

Teorema: L'inclusione naturale $\Omega^p_c(M \setminus A) \to \Omega^p(M, A)$ induce un isomorfismo $H^p_c(M \setminus A) \to H^p(M, A)$. Dimostrazione: Vediamo che l'inclusione è surgettiva. Se ω è una forma con $d\omega = 0$ e $\omega|_A = 0$, non è detto che il suo supporto sia compatto in $M \setminus A$. Dobbiamo mostrare che esiste una forma β tale che $\omega - d\beta$ sia a supporto compatto in $M \setminus A$. Sia T un'intorno tubolare prodotto di A e φ una funzione test come sopra. L'inclusione $i : A \to T$ induce un isomorfismo a livello di coomologia (si veda la costruzione dell'operatore di omotopia per il lemma di Poincaré) a livello di coomologia $i^* : H(T) \to H(A)$ non è altro che la restrizione. Essendo $\omega|_A = 0$ essa è esatta su A, ne segue che è esatta anche su T. Sia α una forma su T tale che $d\alpha = \omega$ e sia β la forma $\varphi\alpha$. Si ha

$$d\beta = d\varphi \wedge \alpha + \varphi d\alpha = d\varphi \wedge \alpha + \varphi\omega$$

Essendo φ nulla fuori da T e valendo 1 in un intorno di A, la forma β è definita globalmente e $\omega - d\beta$ è a supporto compatto in $M \setminus A$.

Similmente si mostra l'iniettività. Se ω è a supporto compatto in $M \setminus A$ ed è un bordo in $\Omega(M, A)$, osssia $\omega = d\alpha$ con $\alpha|_A = 0$ ma non necessariamente a supporto compatto, bisogna trovare una β chiusa tale che $\alpha - \beta$ sia a supporto compatto, cosí si avrà $d(\alpha - \beta) = \omega$ e quindi ω risulterà un bordo anche in $\Omega_c(M \setminus A)$. Siccome ω è a supporto compatto, si avrà $d\alpha = 0$ su un opportuno intorno tubolare T di A. Quindi α è chiusa su T. Siccome $\alpha|_A = 0$, α è esatta su A e quindi anche su T. Sia η una forma su T tale che $d\eta = \alpha$. Poniamo $\beta = d(\varphi\eta)$, si ha

$$d\beta = dd(\varphi\eta) = 0$$

quindi β è chiusa. In oltre

$$d(\varphi\eta) = d\varphi \wedge \eta + \varphi d\eta$$

essendo $\varphi = 1$ su un intorno di A e 0 fuori da T, β è globalmente definita e coincide con α vicino ad A per cui $\alpha - \beta$ è a supporto compatto in $M \setminus A$ ed il teorema è dimostrato.

7.10. **La coomologia di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.** Per $p > 4$ abbiamo $H^p(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 0$ perché $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ha dimensione 4. Siccome $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è compatto, la dualità ci dice che $\mathbb{R} = H^0(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \sim H^4(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. Siccome $P^1(\mathbb{C})$ è una sfera, di cui sappiamo calcolare la coomologia e siccome $P^2(\mathbb{C}) \setminus P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{R}^4$, di cui sappiamo la coomologia, usando la successione di coppia per la coppia $(P^2(\mathbb{C}), P^1(\mathbb{C}))$ si trova

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_c(\mathbb{R}^4) \to H^0(P^2(\mathbb{C})) \to H^0(S^2)) \to \\ \to H^1_c(\mathbb{R}^4) \to H^1(P^2(\mathbb{C})) \to H^1(S^2) \to \\ \to H^2_c(\mathbb{R}^4) \to H^2(P^2(\mathbb{C})) \to H^2(S^2) \to H^3_c(\mathbb{R}^4) \to \dots \end{aligned}$$

La seconda riga è quindi

$$0 \to H^1(P^2(\mathbb{C})) \to 0$$

per cui $H^1(P^2(\mathbb{C})) = 0$ e per dualità $H^3(P^2(\mathbb{C})) = 0$. La terza righa è

$$0 \to H^2(P^2(\mathbb{C})) \to H^2(S^2) \to 0$$

da cui si deduce

$$H^2(P^2(\mathbb{C})) = H^2(S^2) = \mathbb{R}.$$

8. Caratteristica di Eulero Poincaré

8.1. **Teorema del rango generalizzato.** Sia

$$0 \to \cdots \to A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \to \cdots \to 0$$

Una successione esatta di spazi vettoriali di dimensione finita, in cui i termini non nulli siano in numero finito. Allora

$$\sum (-1)^i \dim(A_i) = 0.$$

Dimostrazione: Dal teorema del rango segue che $\dim(A_i) = \dim(\ker f_i) + \dim(\operatorname{Im} f_i)$; per esattezza si ha $\ker f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$. Essendo il primo e l'ultimo termine nulli, tutti gli addenti si cancellano.

8.2. **Caratteristica.** Sia $\mathcal{C}$

$$0 \to \cdots \to A_{i-1} \stackrel{d_{i-1}}{\to} A_i \stackrel{d_i}{\to} A_{i+1} \to \cdots \to 0$$

un complesso di spazi vettoriali di dimensione finita. Siccome l'omologia di tale complesso misura il difetto di esattezza di tale successione si ha

$$\sum_i \dim(H_i(\mathcal{C})) = \sum (-1)^i \dim(A_i).$$

Tale numero si chiama caratteristica di $\mathcal{C}$ e si può definire anche nel caso gli A_i abbiano dimensione infinita ma i gruppi di omologia dimensione finita. È questo il caso delle varietà. Se M è una varietà di tipo finito (per esempio l'interno di una varietà compatta) per induzione sul numero di aperti di un ricoprimento buono, usando la successione di Mayer-Vietoris si vede che

$$\dim(H^i(M)) < \infty \qquad \dim(H^i_c(M)) < \infty$$

In questo caso si definisce la caratteristica di Eulero-Poincarè di M come

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim(H^i(M))$$

Fatto: La caratteristica è un invariante per equivalenza di omotopia in quanto l'omologia lo è (per la costruzione del cilindro.)

Fatto: La caratteristica di ogni varietà chiusa (compatta e senza bordo) di dimensione **dispari** è zero. Dimostrazione: segue immediatamente dalla dualità di Poincarè.

Fatto: La caratteristica di un punto è 1. La caratteristica di D^n ed $\mathbb{R}^n$ è 1.

Fatto: Se M è una varietà unione di due aperti $M = A \cup B$ allora $\chi(M) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. Dimostrazione: segue da Mayer-Vietoris e dal teorema del rango generalizzato.

Fatto: $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Dimostrazione: segue dai fatti precedenti.

Teorema: Siano M ed N due varietà compatte (orientate). Sia $B \subset \partial M$ una componente connessa del bordo di M e supponiamo che esista una componente connessa del bordo di N diffeomeorfa a B. Sia X la varietà ottenuta incollando le due copie di B (in modo che le orientazioni su ∂M e ∂N siano opposte: l'interno dell'una corrisponde all'esterno dell'altra.) Allora

$$\chi(X) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(B).$$

Dimostrazione: Siccome B è una sottovarietà propria di M, ha un intorno tubolare in M e lo stesso vale per la copia di B in ∂N. L'incollamento si può quindi realizzare incollando non $B \subset \partial M$ con $B \subset \partial N$ ma due intornini tubolari, ottenendo una varietà diffeomorfa a X. A questo punto la tesi segue dai fatti precedenti.

Corollario Se M ed N sono varietà di dimensione **pari**, compatte e con lo steso bordo allora, detto X l'incollamento di M ed N lungo il bordo, si ha

$$\chi(X) = \chi(M) + \chi(N).$$

Definizione: Siano M ed N due varietà orientate della stessa dimensione. La somma connessa $M \sharp N$ è la varietà ottenuta rimuovento due pallette una da M ed una da N ed incollando i bordi (che sono diffeomorfi) in modo che le orientazioni indotte siano opposte. Non è difficile dimostrare che la somma connessa non dipende dalle pallette rimosse ne da diffeomorfismo scelto tra i bordi delle stesse.

Teorema: Sia $\dim(M) = \dim(N) = n$ allora

$$\chi(M \sharp N) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n).$$

Dimostrazione: Siano M_0 ed N_0 le varietà ottenute rimuovendo le pallette da M ed N. Siccome M è unione di M_0 e di un disco D^n incollati lungo il bordo comune (che è una sfera S^{n-1}) dal teorema precedente e dalla conoscenza della caratteristica per sfere e dischi si ottiene

$$\chi(M_0) = \chi(M) - (-1)^n$$

e lo stesso vale per N. Applicando ancora il teorema precedende, sicome $\partial M_0 = S^{n-1}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \chi(M \sharp N) &= \chi(M_0) + \chi(N_0) - \chi(S^{n-1}) \\ &= \chi(M) - (-1)^n + \chi(N) - (-1)^n - \chi(S^{n-1}) = \\ \chi(M) + \chi(N) - 2(-1)^n - 1 - (-1)^{n-1} &= \chi(M) + \chi(N) - 1 - (-1)^n \\ &= \chi(M) + \chi(N) - \chi(S^n) \end{aligned}$$

Corollario: Se la dimensione di M ed N è **dispari** allora

$$\chi(M \sharp N) = \chi(M) + \chi(N),$$

se la dimensione di M ed N è **pari** allora

$$\chi(M \sharp N) = \chi(M) + \chi(N) - 2.$$

Corollario La carratteristica di una superficie di genere g è $2 - 2g$.

Corollario Sia M una varietà compatta a bordo. Il doppio MM di M si definisce incollando due copie di M con l'identità sul bordo. Si ha

$$\chi(MM) = 2\chi(M) - \chi(\partial M)$$

Corollario Sia $M = \partial X$ con X di dimensione **dispari**. Allora $\chi(M)$ è **pari**. Dimostrazione XX è una varietà chiusa (compatta e senza bordo) quindi ha caratteristica nulla. In particolare se una varietà ha caratteristica dispari, non è il bordo di nessuna varietà.

Siccome dal calcolo diretto abbiamo visto che $\chi(\mathbb{CP}^2) = 3$, si trova che $\mathbb{CP}^2$ non è il bordo di nessuna varietà pentadimensionale.

Teorema: Se M ed N sono di tipo finito allora

$$\chi(M \times N) = \chi(M)\chi(N)$$

Dimostrazione: Se $N = \mathbb{R}^n$ la tesi segue dal fatto che $\chi(\mathbb{R}^n) = 1$ e dal fatto che $M \times \mathbb{R}^n$ è omotopicamente equivalente ad M. La dimostrazione adesso prosegue per induzione sul numero di aperti di un ricoprimento buono. Se $N = A \cup B$ con la tesi che vale per $A, B, C = A \cap B$, ossia se

$$\chi(M \times A) = \chi(M)\chi(B),\ \chi(M \times B) = \chi(M)\chi(B),\ \chi(M \times C) = \chi(M)\chi(C)$$

da un teorema precedente si ottiene

$$\chi(M \times N) = \chi(M \times A) + \chi(M \times B) - \chi(M \times C)$$

per cui

$$\chi(M \times N) = \chi(M)(\chi(A) + \chi(B) - \chi(C)) = \chi(M)\chi(N).$$