Esercizi d'esame Geo Sup II 2010/2011. Foglio 1

(1) Scrivere un atlante differenziabile per $\mathbb{RP}^2$.
(2) Caratterizzare le geodetiche di $\mathbb{H}^2$ con la metrica iperboica stantard.
(3) Sia M una varietà Riemanniana completa con curvatura $< k < 0$. Sia ϕ_t un flusso di isometrie. Dimostrare che le geodetiche chiuse sono invarianti.
(4) Sia $b(x,x)$ una forma bilineare simmetrica non degenere su $\mathbb{R}^n$. Sia $M = \{x : b(x,x) = 1\}$ e sia ∇ la proiezione b-ortogonale della connessione usuale di $\mathbb{R}^n$ sul tangente TM. Dimostrare che ∇ è una connessione su M a torsione nulla tale che b risulti parallela per ∇.
(5) Sia M una varietà differenziabile. Dimostrare che per ogni campo X e forma ω sia ha $L_X d\omega = dL_X\omega$.
(6) Sia S una superficie e sia $p \in S$. Sia g una metrica riemanniana a curvatura costante -1 su $S \setminus \{p\}$ tale che il completamento metrico sia S con una singolarità conica in p di angolo α. Enunciuare un teorema di Gauss-Bonnet che tenga conto della singolarità conica. Puø' S essere un toro? E una sfera?
(7) Sia $\mathbb{H}^2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ con la metrica iperbolica standard $ds^2 = (dx^2 + dt^2)/t^2$. Sia $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,t) = x^2 - t^2$. Calcolare il gradiente di f.
(8) Sia S il grafico della funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ data da $f(x,y) = x^2 - y^3$. Calcolare la curvatura di S.
(9) Sia g la metrica su $S^1 \times \mathbb{R}$ data da $ds^2 = t^4 d\theta^2 + dt^2$. Scrivere il Riemann di g.
(10) Calcolare le curvature sezionali di $\mathbb{T}^2 \times S^2$ (ove $\mathbb{T}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = |y| = 1\}$ e $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ con le metriche indotte da quelle Euclidee.)
(11) Sia M una varietà Riemanniana completa tale che in ogni punto esistano coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$ tali che $\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ dimostrare che il rivestimento universale di M con la metrica indotta è isometrico a $\mathbb{R}^n$.