Esercizi d'esame Geo Sup II 2010/2011. Foglio 3

(1) Scrivere un atlante differenziabile per $\mathbb{CP}^1$.

(2) Caratterizzare le geodetiche di $\mathbb{S}^2$ con la metrica sferica standard.

(3) Sia M un'ellissoide di $\mathbb{R}^3$ (ossia l'insieme dei punti x tali che $b(x,x) = 1$ per una forma bilineare simmetrica definita positiva b) con la metrica indotta dalla metrica Euclidea standard di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che esiste una geodetica chiusa non costante.

(4) Sia M una varietà differenziabile e siano ∇^1 e ∇^2 due connessioni a torsione nulla. Dimostrare che se il tensore $\nabla^1 - \nabla^2$ risulta essere una 2-forma a valori TM allora $\nabla^1 = \nabla^2$.

(5) Sia M una varietà Riemanniana e siano (ρ, θ) coordinate polari locali. Si dimostri che un campo J è di Jacobi lungo un raggio se e solo se $L_{\partial_\rho} J = 0$.

(6) Siano $p_1, \dots, p_k \in S^2$. Determinare il minimo k per cui esiste una metrica Riemanniana g a curvatura costante -1 su $S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ il cui completamento metrico sia S^2 con singolarità coniche nei p_i.

(7) Sia $\mathbb{H}^2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ con la metrica iperbolica standard $ds^2 = (dx^2 + dt^2)/t^2$. Sia $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,t) = x^2 - t^2$. Calcolare l'Hessiano di f.

(8) Sia S il grafico della funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ data da $f(x,y) = x^3 + y$. Calcolare la curvatura di S.

(9) Sia g la metrica su $S^1 \times \mathbb{R}$ data da $ds^2 = d\theta^2 + (2 + sin\theta)^2 dt^2$. Scrivere il Riemann di g.

(10) Calcolare le curvature sezionali di $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ (ove $T^2 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| = |y| = 1\}$ con la metrica indotta da quelle Euclidea).

(11) Sia S una superficie compatta con una metrica con curvatura costante -1. Dimostrare che il gruppo delle isometrie di S è finito.