Esercizi d'esame Geo Sup II 2010/2011. Foglio 5

(1) Scrivere un atlante differenziabile per $S^3 \times S^1$.
(2) Caratterizzare le geodetiche di $S^1 \times \mathbb{R}$.
(3) Sia M una varietà compatta con tutte le curvature sezionali negative. Dimostrare che il gruppo fondamentale di M è infinito.
(4) Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa tale che per ogni campo Z l'hessiano di Z risulti simmetrico. Dimostrare che M ha curvatura zero. Dimostrare che il rivestimento universale di M è isometrico a $= \mathbb{R}^n$.
(5) Sia M una varietà Riemanniana e sia $p \in M$. Dimostrare che esiste un intorno U di p tale che per ogni geodetica γ in U un campo di Jacobi J lungo γ è determinato dai suoi valori iniziali e finali.
(6) Esibire una metrica Riemmanniana su S^2 che sia liscia e piatta fuori da 8 punti, nei quali presenti delle singolarità coniche. Determinare la somma totale degli angoli conici e dimostrare che tale somma non dipende dalla metrica esibita.
(7) Sia $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| + 1\}$ con la metrica sferica standard indotta dalla metrica Euclidea di $\mathbb{R}^3$. Sia $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x$. Calcolare il laplaciano di f.
(8) Sia S la superficie ottenuta per rotazione della funzione $1/x$. Calcolare la curvatura di S.
(9) Sia g la metrica su $S^2 \times \mathbb{R}^+$ data da $ds^2 = t^2 d\theta^2 + dt^2$ (ove $d\theta^2$ è la metrica sferica standard du S^2). Scrivere il Riemann di g.
(10) Calcolare le curvature sezionali di $\mathbb{S}^2_1 \times S^2_2$ (ove $S^2_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ ed $S^2_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 2\}$ con le metriche indotte da quelle Euclidee.)
(11) Sia M una varietà Riemanniana compatta e per ogni $c > 0$ sia M_c la varietà ottenuta moltiplicando la metrica di M per c. Dimostrare che se esite una costante K tale che $|sec(M_c)| < K$ allora il tensore di Riemann di M è nullo.