1. File: Alcuni esercizi di topologia generale

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ con la topologia che viene dalla sua presentazione come quoziente di $\mathbb{Q}^{n+1} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{Q}$ è dotato della topologia standard).

1. X è connesso?
2. X è compatto?
3. X è Hausdorff?
4. X soddisfa il primo assioma di numerabilità?
5. X soddisfa il secondo assioma di numerabilità?
6. X è localmente connesso?
7. X è localmente compatto?

(Uno spazio si dice localmente compatto se ogni punto ha un intorno compatto)

Soluzione. Sia $n > 0$. (Se $n = 0$ allora $\mathbb{P}^0(\mathbb{Q})$ è un punto.)

1. No. In una carta $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^n \cup \{\infty\}$ sia B la palla aperta di centro zero e raggio π. Siccome π non è algebrico non esistono punti di $\mathbb{Q}^n$ a distanza π da zero. Quindi, detto A il complementare di B in $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$, si ha che A è aperto. Quindi A e B sono due aperti disgiunti, entrambi non vuoti e la cui unione è $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$.
2. No. In una carta locale $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^n \cup \{\infty\}$ sia $x = (e, \ldots, e)$, per $n > 0$ intero sia $U_n = B(x, \frac{\pi}{n}) \setminus B(x, \frac{\pi}{n+1})$ e sia U_0 il complementare di U_1 in $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$. Siccome π ed e sono algebricamente indipendenti, e siccome e non è algebrico, gli U_i sono tutti aperti e ricoprono $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$. Tale ricoprimento non ammette sotto ricoprimenti finiti.
3. Si. Dati due punti x, y in $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ si può sempre trovare una carta $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^n \cup \{\infty\}$ in cui $x, y \neq \infty$. Qui basta considerare $r = d(x, y)/4$ e le palle aperte $B(x, r)$ e $B(y, r)$ sono disgiunte.
4. Si. In una carta locale le palle di raggio $1/n$ sono una base di intorini numerabile.
5. Si. Segue dal punto 4 e dal fatto che $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ sia numerabile.
6. No. La dimostrazione del punto 1 si applica localmente.
7. No. La dimostrazione del punto 2 si applica localmente.

Esercizio 2. Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x \neq 0 \text{ e } y/x \in \mathbb{N}\}$

1. Determinare $\overline{S}$ (la chiusura di S) e dire quali sono i punti di accumulazione di S.
2. S è connesso?
3. $\overline{S}$ è connesso?
4. S è localmente connesso?
5. $\overline{S}$ è localmente connesso?

Soluzione. L'insieme S è costituito dall'unione di tutte le rette con pendenza intera meno l'origine. (Contiene quindi le semirette orizzontali ma non quelle verticali)

1. Sia Y l'asse delle y. Si ha $\bar{S} = S \cup Y$. Infatti l'origine è punto di accumulazione di ogni retta e quindi sta in $\bar{S}$, d'altronde ogni punto del tipo $(0, y)$, con $y \neq 0$, è limite di $(\frac{y}{n}, y) \in S$. Quindi $S \cup Y \subset \bar{S}$. D'altronde il complementare di $S \cup Y$ è costituito da un'unione di settori aperti e quindi è aperto. Quindi $S \cup Y$ è chiuso. I punti di accumulazione di S sono tutti e soli i punti di $\bar{S}$ in quanto $\bar{S}$ non ha punti isolati.

2. No. Sia $A = S \cap \{x < 0\}$ e $B = S \cap \{x > 0\}$. Siccome per definizione i punti di S hanno $x \neq 0$, si ha $S = A \cup B$. Per definizione A e B sono disgiunti; entrambi sono aperti in quanto intersezione di S con aperti di $\mathbb{R}^2$ ed entrambi sono non vuoti.

3. Si. $\bar{S}$ è l'unione di connessi (ogni retta è connessa in quanto omeomorfa a $\mathbb{R}$ che è connesso) con intersezione non vuota (l'origine).

4. Si. Ogni punto di S appartiene a una semiretta con pendenza intera, quindi esiste un suo intorno che interseca solo quella retta in un segmento.

5. No. Sia $p = (0, y) \in Y$ allora $U = B(p, y/2) \cap \bar{S}$ è fatto da una successione di segmenti disgiunti che si accumulano sull Y e quindi non esite nessun intorno di p, contenuto in U che sia connesso.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^2$ munito della topologia standard si consideri il sottoinsieme $A = (\{ x^2+y^2 < 3 \} \bigcup \{ x = 0 \}) \cap \{ y \neq 0 \}$. Determinare
1. l'insieme dei punti interni A^o e la chiusura $\overline{A}$,
2. la frontiera ∂A,
3. le componenti connesse di A e di $\overline{A}$.
4. Lo spazio $\overline{A} \cap \{ x^2 + y^2 \leq 9 \}$ è omeomorfo al disco unitario?

Soluzione. L'insieme A è il disco aperto di raggio $\sqrt{3}$, a cui è stato tolto il diametro orizzontale e a cui sono state aggiunte le duesemirette verticali aperte dell'asse delle y. Ne segue che:

1. I punti interni di A sono i punti del disco aperto di raggio $\sqrt{3}$ meno il diametro orizzontale: $A^o = \{x^2 + y^2 < 3\} \setminus \{y = 0\}$. La chiusura di A è il disco chiuso di raggio $\sqrt{3}$ a cui è stato aggiunto l'asse delle y: $\bar{A} = \{x^2 + y^2 \leq 3\} \cup \{x = 0\}$.

2. $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = \{x^2+y^2 = 3\} \cup \{(0, y) : y^3 \geq 3\} \cup \{(x, 0) : x^2 \leq 3\}$.

3. Le componenti connesse di A sono $A \cap \{y > 0\}$ e $A \cap \{y < 0\}$.

4. No. Se togliamo il punto $(0, \sqrt{3})$ allo spazio $\bar{A} \cap \{x^2+y^2 \leq 9\}$ lo si sconnette mentre il disco unitario meno un qualsiasi suo punto rimane connesso.

Esercizio 4. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ col sottoinsieme dei punti "propri" di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e sia

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tali che } x = n\} \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

1. Determinare la chiusura D_1 di $\bigcup_{n=1,..10} C_n$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
2. Determinare la chiusura D_2 di $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
3. L'insieme D_1 è connesso?

4. L'insieme D_2 è connesso?
5. L'insieme D_1 è compatto?
6. L'insieme D_2 è compatto?

Soluzione.

1. L'insieme C_n ha un unico punto all'infinito, indipendente da n. Infatti $\mathbb{R}^2$ corrisponde al piano affine di $\mathbb{R}^3$ dato dall'equazione $z = 1$. I punti di C_n corrispondono quindi alle rette $r(y, n)$ di $\mathbb{R}^3$ passanti per i punti del tipo $(n, y, 1)$. Per $y \to \pm\infty$ la retta $r(y, n)$ tende alla retta per $(0, 1, 0)$ indipendentemente da n. Per cui $D_1 = \cup_{n=1,...,10} C_n \cup \{[(0, 1, 0)]\}$.

2. I punti limite per che si ottengono da $r(y, n)$ facendo tendere r ed n all'infinito sono tutte le possibili rette passanti per punti del tipo $(a, b, 0)$, ovvero l'intera retta all'infinito. Quindi $D_2 = \cup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ Piú la retta all'infinito.

3. Per quando detto nel punto 1, l'insieme D_1 è costituito da un'unione finita di insiemi del tipo $C_n \cup \{[(0, 1, 0)]\}$, ognuno dei quali è connesso in quanto omeomorfo a S^1. Tali insiemi si intersecano nel punto $\{[(0, 1, 0)]\}$ e quindi D_1 risulta connesso in quanto unione di connessi con intersezione non vuota.

4. Lo stesso argomento del punto 3 si applica al caso di D_2.

5,6. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è compatto, ergo sia D_1 che D_2 sono compatti in quanto chiusi di un compatto.

Esercizio 5. Per $n = 0, 1, \cdots$, sia

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ nx \leq y \leq (n + 1)x\},$$

e sia

$$A = \bigcup A_n^o,$$

dove ^{o} indica la parte interna di un insieme, cioè l'insieme dei punti interni.

1. $\bigcup A_n$ è chiuso?
2. Determinare A^o, $\overline{A}$, $(\overline{A})^o$, e la frontiera ∂A di A.
3. Determinare le componenti connesse di A e quelle di $\overline{A}$.

Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su A_0 definita da :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \text{ se } (x, y) = (x', y') \text{ oppure}$$
$$(x, y), (x', y') \in \partial A_0 \text{ e } d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (0, 0)) = d_{\mathbb{R}^2}((x', y'), (0, 0)).$$

4. Dimostrare che il quoziente $A_0/\mathcal{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Soluzione.

1. No. I punti del tipo $(0, y)$ stanno nella chiusura di $\cup A_n$ ma non stanno in nessuno degli A_n.

2. A è aperto in quanto unione di aperti e coincide quindi con la sua parte interna. La chiusura di A è il primo quadrante chiuso, la parte interna della chiusura di A è il primo quadrante aperto, la frontiera di A è la differenza tra la sua chiusura e la sua parte interna ed è formato

quindi dall'unione dei semi assi positivi e delle semirette $\{y = nx, x > 0\}$.

3. A_n^o è connesso (è connesso per archi) e aperto. A è unione disgiunta degli A_n^o, ne segue che le componenti connesse di A sono esattamente gli insiemi A_n^0.

4. A_0 è il settore tra l'asse orizzontale e la semiretta a 45 gradi (che è $2\pi/8$). Quindi un omeomorfismo siu può costruire in coordinate polari ponendo $(\rho, \theta) \mapsto (\rho, 8\theta)$.

Esercizio 6. Si considerino le seguenti topologie su $\mathbb{R}^2$:
$\mathcal{S}$: La topologia standard
$\mathcal{Z}$: La topologia di Zariski: la meno fine tra le topologie contenenti (come aperti) gli insiemi della forma

$$U_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P(x, y) \neq 0\}$$

con $P \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomio.
$\mathcal{C}$: La topologia su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ prodotto della topologia cofinita su $\mathbb{R}$.
$\mathcal{D}$: La topologia cofinita su $\mathbb{R}^2$.

1. Comparare a due a due le topologie sopra definite stabilendo quale sia la più fine.

2. Caratterizzare la topologia indotta da $\mathcal{Z}$ su una qualsiasi retta $l \subseteq \mathbb{R}^2$.

3. Per ognuna delle topologie dire se lo spazio topologico è: separabile, Hausdorff, connesso, quasicompatto. (quest'ultima domanda può essere non facile per $\mathcal{Z}$.)

4. Quale di queste topologie è metrizzabile (esiste cioè una metrica che induce tale topologia)?

Soluzione. Ricordiamo che una topologia τ si dice piú fine di un'altra τ_1 se ha piú aperti (ossia se ogni di τ_1 è anche aperto di τ).

1. $\mathcal{S}$ è strettamente piú fine di $\mathcal{Z}$ che è strettamente piú fine di $\mathcal{C}$ che è strettamente piú fine di $\mathcal{D}$. Infatti:

- $\mathcal{S}$ è piú fine di $\mathcal{Z}$ in quando gli zeri di polinomi sono chiusi per la topologia standard e quindi i loro complementari aperti. D'altro canto l'unico aperto di $\mathcal{Z}$ limitato è il vuoto, quindi $\mathcal{Z}$ non è equivalente a $\mathcal{S}$.
- $\mathcal{Z}$ è piú fine di $\mathcal{C}$. Infatti una base per $\mathcal{C}$ è formata dai complementari degli insiemi del tipo $(\{a_1, \ldots, a_n\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{b_1, \ldots b_k\})$ e dati $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots b_k$, il polinomio $P(x, y) = [(x-a_1) \cdots (x-a_n)][(y-b_1) \cdots (y-b_k)]$ si annulla su $(\{a_1, \ldots, a_n\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{b_1, \ldots b_k\})$. Per dimostrare che le due topologie non sono equivalenti basta considerare il polinomio $P(x, y) = x - y$. Non esiste nessun elemento della base di $\mathcal{C}$ che sia contentuno in U_P (che quindi non è aperto in $\mathcal{C}$).
- $\mathcal{C}$ è piú fine di $\mathcal{D}$. Infatti una base per $\mathcal{D}$ è costituita dagli insiemi che sono complementari di un punto. Tali insiemi sono

aperti per $\mathcal{C}$. Per vederlo, sia $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Gli insiemi $U = \{x \neq x_0\}$ e $V = \{y \neq y_0\}$ sono aperti per $\mathcal{C}$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} = U \cup V$ che quindi è aperto in quanto unione di aperti. D'altronde, l'insieme $\{x \neq 0\}$ è aperto in $\mathcal{C}$ ma non contiene nessun insieme cofinito e quindi non è aperto in $\mathcal{D}$.

2. Essendo l definita da un'equazione lineare, per sostituzione di una variabile si ottiene che la restrizione di $\mathcal{Z}$ a l è omeomorfa a quella di Zariski su $\mathbb{R}$ (che è poi la cofinita).

3. $\mathbb{R}^2$ con la topologia standard è separabile, Hausdorff, connesso, non compatto.

- Il fatto che $(\mathbb{R}^2, \mathcal{S})$ sia separabile implica che lo siano anche $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Z}), (\mathbb{R}^2, \mathcal{C}), (\mathbb{R}^2, \mathcal{D})$ in quanto topologie meno fini: un'insieme denso per $\mathcal{S}$ lo è anche per ogni altra topologia meno fine. Stessa cosa per la connessione: l'identità di $\mathbb{R}^2$ è continua da una topologia piú fine verso una meno fine, $\mathbb{R}^2$ standard è connesso e l'immagine continua di un connesso connessa.
- $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Z})$ Non è Hausdorff: due aperti della base si intersecano sempre. Ne segue che $(\mathbb{R}^2, \mathcal{C})$ e $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D})$ non sono Hausdorff in quanto meno fini di $\mathcal{Z}$.
- Per vedere che è quasi compatto ci si deve appellare alle proprietà dei polinomi. Due polinomi su $\mathbb{R}^2$ o hanno un fattore comune oppure hanno un numero finito di zeri comune. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ e siano P_i dei polinomi tali che $\{U_{P_i}\}$ sia un ricoprimento di X. Se p è un fattore di P_i allora $U_{P_i} = U_p \cap U_{P_i/p}$. Se p è un fattore comune a tutti i polinomi P_i allora $X \subset U_p \cap (\cup_i U_{P_i/p})$ e quindi gli insiemi $U_{P_i/p}$ coprono X. Possiamo quindi suppore che i P_i non abbiano fattori comuni. Ne segue che possiamo trovare un numero finito $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ senza fattori comuni. Tali polinomi hanno un numero finito di radici $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^2$. Per ognuna di queste radici che sta in X sappiamo che esiste un polinomio $P_{i_{x_j}}$ della famiglia iniziale che non si annulla in x_j. Quindi la famiglia finita $\{U_P : P = P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\} \cup \{U_P : P = P_{i_{x_1}}, \ldots, P_{i_{x_m}}\}$ copre X. Ne segue che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ con la topologia $\mathcal{Z}$ è quasicompatto.
- La quasi compattezza di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Z})$ implica quelle di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{C}$ e $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D})$ in quanto topologie meno fini: l'immagine continua di un quasicompatto è quasicompatta e l'identità di $\mathbb{R}^2$ è continua da $\mathcal{Z}$ a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

4. Ogni spazio metrico è Hausdorff, quindi né $(\mathbb{R}^2, \mathcal{Z})$ né $(\mathbb{R}^2, \mathcal{C})$ né $(\mathbb{R}^2, \mathcal{D})$ sono metrizzabili. Mentre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{S})$ è metrizzabile per definizione.

Esercizio 7. Sia B'_n lo spazio topologico ottenuto partendo da n copie di S^1, (Cioè da $S^1 \times \{1, \cdots, n\}$ con la topologia che si ottiene come prodotto della topologia indotta da quella euclidea su S^1 con quella discreta su $\{1, \cdots, n\}$). Sia B_n lo spazio topologico che si ottiene da B'_n identificando a un punto l'insieme $\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,n)\}$.

1. B_n è compatto?
2. B_n è connesso?
3. B_n è localmente euclideo? (Uno spazio topologico si dice localmente euclideo se ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^d$.)

4) mostrare che B_n è omeomorfo a B_m solo se $n = m$.

Soluzione.

1. S^1 è compatto, l'inclusione di S^1 in B_n come $S^1 \times \{i\}$ è continua per ogni i e quindi la sua immagine S_i è un compatto. Ne segue che B_n è unione finita di compatti e quindi è compatto.
2. Sia S_i come sopra. S_i è omeomorfo a S^1 e quindi è connesso, d'altronde il punto $[(1,i)] \in B_n$ appartiene ad ogni S_i. Quindi B_n è unione di connessi con intersezione non vuota e quindi è connesso.
3. Per $n = 1$ $B_1 = S^1$ e quindi è localmente euclideo. Per $n > 1$ invece no. Infatti il punto $[(1,i)] \in B_n$ ha un intorno connesso U tale che se U meno $[(1,i)]$ non è connesso mentre in R^n, per $n > 1$, ogni aperto connesso rimane connesso se rimuoviamo un qualsiasi suo punto.
4. Il gruppo fondamentale di B_n è il gruppo libero su n elementi e il gruppo libero su n elementi non è isomorfo a quello su m elementi se $m \neq n$. (Alternativamente, si possono contare le componenti connesse dell'intorno U meno $[(1,i)]$ come nel punto precedente.)

Esercizio 8. Sia $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ definita da:

$$x\mathcal{R}y \text{ se } x = y \text{ oppure } x + y = 0,$$

e $X := \mathbb{R}/\mathcal{R}$ dotato della topologia quoziente.

1. X è Hausdorff?
2. X è omeomorfo a $\mathbb{R}$?

Sia ora $\mathcal{R}$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ definita da:

$(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2)$ se $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$ oppure $x_1 + y_1 = 0$ e $x_2 + y_2 = 0$,

e sia $Y = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

3. Y è Hausdorff?
4.(*) Y è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$?

Soluzione. La classe di equivalenza di $x \in R$ è data da $[x] = \{x, -x\}$. Sia $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}$ e sia $f : X \to \mathbb{R}^+$ definita da $f([x]) = |x|$. Ovviamente tale funzione è ben definita. In oltre, se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è definita da $F(x) = |x|$ e se $\pi : \mathbb{R} \to X$ è la proiezione naturale, è chiaro che $F = f \circ \pi$. Essendo F continua e aperta ($\mathbb{R}^+$ è dotato della topologia indotta!!!) lo è pure f; essendo f biunivoca è quindi un omeomorfismo. Ne segue che:

1. X è Hausdorff in quanto $\mathbb{R}$ lo è ed $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$.

2. X non è omeomorfo a $\mathbb{R}$ in quanto se si toglie lo zero a $\mathbb{R}^+$ si ottiene $(0, \infty)$ che è connesso mentre se si toglie un qualsiasi punto a $\mathbb{R}$ lo si sconnette.

Passiamo a $\mathbb{R}^2$. In coordinate polari di $\mathbb{R}^2$ si ha che $(\rho, \theta)\mathcal{R}(\rho', \theta')$ se e solo $\rho = \rho'$ e $\theta = \pm\theta'$, il che si puó anche scrivere come $[\theta = \theta'$ oppure $\theta = \theta' \pm \pi]$. La funzione $f : Y \to \mathbb{R}^2$ data da $f(\rho, \theta) = (\rho, 2\theta)$ è ben definita in quanto θ è definito modulo 2π. Come sopra, se chiamiamo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione $F(\rho, \theta) = (\rho, 2\theta)$ e $\pi : \mathbb{R}^2 \to Y$ la proiezione naturale, si ha che $F = f \circ \pi$. Essendo F continua e aperta lo è anche f, che risulta quindi un omeomorfismo di Y con $\mathbb{R}^2$ in quanto biunivoca. Quindi:
3. Si.
4. Si.

Esercizio 9. Per $i = 0, 1, 2, 3$ sia X_i la retta $X_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \, y = i\}$, e sia $X = \bigcup X_i$. Si consideri la relazione di equivalenza su X tale che:

$$(x, 0) \sim (1/x, 1) \sim (x, 2) \sim (1/x, 3) \text{ per ogni } x \neq 0$$

1.$X/\sim$ è quasi-compatto?
2. $X/\sim$ è connesso?
3. $X/\sim$ è localmente euclideo? (Uno spazio topologico si dice localmente euclideo se ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^d$.)

Soluzione. X è omeomorfo a una circonferenza con due "punti doppi" quindi non è Hausdorff, è quasi-compatto ed è localmente euclideo. Formalizziamo ora tale affermazione.

Siano $Y_1 = X_0 \cup X_1$ e $Y_2 = X_2 \cup X_3$ con le relazioni $\sim_1$ e $\sim_2$ definite da $(x, 0) \sim_1 (1/x, 1)$ e $(x, 2) \sim_2 (1/x, 3)$. Sia $Z_i = Y_i/\sim_i$ e siano $S_1 = [(0, 0)], N_1 = [(0, 1)] \in Z_1$ e $S_2 = [(0, 2)], N_2 = [(0, 3)] \in Z_2$, N ed S stanno per "polo Nord" e "polo Sud". Andiamo a dimostrare che Z_i è una circonferenza per $i = 1, 2$ e che X è ottenuto indetificando i punti di Z_1 con quelli di Z_2 tranne che i poli. Esaminiamo Z_1, per Z_2 sará uguale.

Sia C la circonferenza di centro zero e raggio $1/2$ in $\mathbb{R}^2$. C è tangente a X_0 in $P_0 = (0, 0)$ e a X_1 in $P_1 = (0, 1)$. Sia f_0 la proiezione stereografica di X_1 su C con polo in $(0, 0)$: $f_0(x, 1)$ è il punto di intersezione tra C e la retta passante per $(0, 0)$ e $(x, 1)$. Similmente sia f_1 la proiezione stereografica di X_0 su C con polo $(0, 1)$. Sia ora $P = (x, 1) \in X_1$ e sia $Q = (y, 0)$ il punto definito da $(y, 0) = f_1^{-1}(f_0(x, 1))$. I triangoli PP_1P_0 e P_1P_0Q sono simili e il diametro P_1P_0 di C è 1. Ne segue che $y = 1/x$. Sia $F : Y_1 \to C$ definita da $F(x, 1) = f_0(x, 1)$ e $F(y, 0) = f_1(y, 0)$. F è continua e aperta, in oltre, per il conto appena fatto F passa al quoziente e definisce una funzione $f : Z_1 \to C$ continua e aperta, ed è immediato vedere che è biunivoca. Quindi $f : Z_1 \to C$ è un omeomorfismo che manda S_1 in P_0 e N_1 in P_1.

Traslando tutto ció del vettore $(0, 2)$ si definisce ugualmente un omeomorfismo $g : Z_2 \to C$ che manda S_2 in P_0 e N_2 in P_1. Adesso è chiaro che X è ottenuto dai due cerchi $Z_1 \cup Z_2$ identificando i punti tali che $f(z_1) = g(z_2)$, tranne i poli.

Ora N_1 ed N_2 non hanno intorni disgiunti in X quindi X non è Hausdorff. In oltre l'immagine di Z_1 in X è connessa in quanto Z_1 è un cerchio e quindi è connesso, lo stesso vale per Z_2 e quindi X è unione di due connessi con intersezione non vuota e quindi è connesso.

L'inclusione di Z_1 in X è un omeomorfismo con l'immagine (lo stesso vale per Z_2) e quindi X è localmente euclideo in quanto C lo è.

Esercizio 10. Sia $r > 0$ e

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, t.c. \min_{n \in \mathbb{Z}} d_{\mathbb{R}^2}((x, y), (n, 0)) < r\}.$$

1. Determinare l'insieme dei punti interni, la chiusura e la frontiera di A_r.

2. Determinare, al variare di r, le componenti connesse di A_r e quelle di $\overline{A_r}$. Esistono, in particolare, valori di r per cui $\overline{A_r}$ è connesso e A_r non lo è?

Soluzione. A_r è l'unione delle palle aperte $B((n, 0), r)$ di centro $(n, 0)$ e raggio r.

1. A_r è aperto in quanto unione di aperti. La chiusura di A_r è l'unione delle palle chiuse di centro $(n, 0)$ e raggio r. La frontiera di A_r è costituita dall'unione dei cerchi di centro $(n, 0)$ e raggio r meno i punti di A_r stesso.

2. Per $r \leq 1/2$ le palle $B((n, 0, r))$ sono disgiunte, sono degli aperti di A_r e sono connesse. Sono quindi le componenti connesse di A_r. Per $r > 1/2$ A_r è connesso in quanto unione di connessi a intersezione non vuota. Mentre per $\overline{A_r}$; se $r < 1/2$ allora le palle chiuse $\overline{B((n, 0), r)}$ sono disgiunte, aperte in A_r per la topologia indotta e connesse. Sono quindi le componenti connesse di $\overline{A_r}$. Per $r \geq 1/2$, si ha che $\overline{A_r}$ è connesso in quanto unione di connessi con intersezione non nulla (le palle $\overline{B((n, 0), r)}$ si intersecano con $\overline{B((n \pm 1, 0), r)}$). Quindi per $r = 1/2$ si ha che $\overline{A_r}$ è connesso mentre A_r no.

Esercizio 11. Sia X un insieme, e τ_1, τ_2 due topologie su X, τ_1 più fine di τ_2. Per $A \subseteq X$ sia $\overline{A}^{\tau_i}$ la chiusura di A rispetto alla topologia τ_i, $i = 1, 2$.

1. mostrare che

$$\overline{A}^{\tau_1} \subseteq \overline{A}^{\tau_2}.$$

2. Dare un esempio in cui l'inclusione è stretta e le topologie non sono banali, cioè τ_1 non è la topologia discreta e τ_2 non è quella grossolana.

3. Sia X un insieme non finito. Mostrare che la topologia cofinita su $X \times X$ non è la topologia prodotto della topologia cofinita su X. Le due topologie sono confrontabili?

Soluzione.

1. Siccome τ_1 è più fine di τ_2 (e quindi ha più aperti) ogni chiuso di τ_2 è chiuso per τ_1. Quindi $\overline{A}^{\tau_2}$, che è chiuso per τ_2, è chiuso anche per τ_1 e contiene A per definizione di chiusura. Quindi contiene $\overline{A}^{\tau_1}$ che per definizione è il piú piccolo chiuso di τ_1 che contiene A.

2. Su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sia τ_1 la topologia euclidea, e τ_2 la topologia prodotto di quella grossoloana su un fattore $\mathbb{R}$ e di quella euclidea sull'altro. Sia $A = [0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$. A è chiuso per τ_1 mentre la chiusura di A per τ_2 è $[0,1] \times \mathbb{R}$ (gli aperti per τ_2 son tutti del tipo $U \times \mathbb{R}$ con U aperto in $\mathbb{R}$).

3. Una base per la topologia prodotto della cofinita è formata dai complementari degli insiemi del tipo $(\{a_1, \dots, a_n\} \times X) \cup (X \times \{b_1, \dots b_k\})$, con $a_i \in X$ e $b_i \in X$. Se X non è finito tali insiemi non sono aperti per la topologia cofinita.

Le due topologie sono confrontabili e la topologia prodotto della cofinita risulta piú fine della cofinita. Infatti una base per la topologia cofinita è costituita dagli insiemi che sono complementari di un punto. Tali insiemi sono aperti per la prima topologia. Per vederlo, sia $p = (x_0, y_0) \in X \times X$. Gli insiemi $U = \{x \neq x_0\}$ e $V = \{y \neq y_0\}$ sono aperti per la topologia prodotto della cofinita e $(X \times X) \setminus \{p\} = U \cup V$ che quindi è aperto in quanto unione di aperti. Quindi ogni aperto della topologia cofinita è aperto anche nella prima topologia.

Esercizio 12. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ col sottoinsieme dei punti "propri" di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x \sin(\frac{1}{x}) \text{ per } x \neq 0, f(0) = 0.$$

1. Determinare la chiusura $\overline{Y}$ di Y in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
2. $\overline{Y}$ con la topologia indotta da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è localmente connesso?

Soluzione.

1. La funzione f è continua quindi Y è chiuso in $\mathbb{R}^2$. In oltre, il limite per $x \to \pm\infty$ di $f(x)$ è 1 quindi la chiusura di Y in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottiene aggiungendo un solo punto all'infinito a Y. (In coordinate ove $\mathbb{R}^2$ è identificato con il piano di $\mathbb{R}^3$ dato da $z = 1$, il punto all'infinito di Y in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corrisponde alla retta per $(1, 0, 0)$.)

2. $\overline{Y}$ è omeomorfo a S^1 ed è quindi localmente connesso per archi. Consideranto $S^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'omeomorfismo è dato da

$$(x, f(x)) \mapsto x \qquad [(1, 0, 0)] \mapsto \infty.$$