ESAME DI GEOMETRIA 2. 11-02-2013,
Soluzioni

ESERCIZIO 1, punti 2+2+2+2+2+2
Sia X lo spazio topologico che si ottiene da $\mathbb{R}$ mediante la relazione di equivalenza:

$$\{x \simeq y \text{ se } y = 2^n x \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}\}$$

Dire se:

1. X è di Hausdorff
2. X è connesso
3. X è compatto

SOLUZIONE. Indichiamo con π la proiezione naturale sul quoziente.

1. Sia $U \subset X$ un qualsiasi intorno aperto di $[0]$. $\pi^{-1}(U)$ è un aperto saturo di $\mathbb{R}$ contenente 0. Essendo aperto contiene un intervallo del tipo $(-a, a)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esite $n \in Z$ tale che $2^n x \in (-a, a)$, per cui $[x] \in U$. Da cui $U = X$. Avendo X almeno due elementi, X non è Hausdorff.
2. X è connesso in quanto immagine di un connesso ($\mathbb{R}$) tramite un'applicazione continua (π).
3. X è compatto perchè se $\{U_i\}$ è un ricoprimento di aperti di X, allora esiste i_0 tale che $[0] \in U_{i_0}$, per quanto detto sopra, $U_{i_0} = X$ costituisce un sottoricoprimento finito.

Sia ora Y lo spazio topologico che si ottiene da $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mediante la stessa relazione di equivalenza

Dire se:

1. Y è di Hausdorff
2. Y è connesso
3. Y è compatto

SOLUZIONE. Indichiamo con π la proiezione naturale sul quoziente.

1. Il grafico della relazione di equivalenza è costituito dal sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$ formato dalle rette r_n a pendenza 2^n con $n \in \mathbb{Z}$. Tale insieme è un chiuso di $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$ in quanto gli unici punti di accumulazione delle rette r_n stanno o sulle rette stesse o sugli assi coordinati (cioè $\{xy = 0\}$). In oltre, la relazione di equivalenza proviene da un'azione del gruppo $\mathbb{Z}$: $g_n(x) = x2^n$, quindi π è aperta. Ne segue che Y è Hausdorff.

2. $x \sim y$ implica $xy > 0$ per cui $\mathbb{R}^+$ ed $\mathbb{R}^-$ sono aperti saturi non vuoti e disgiunti e quindi $A = \pi(R^+)$ e $B = \pi(R^-)$ sono aperti disgiunti e non vuoti. Chiaramente $Y = A \cup B$ quindi Y non è connesso.

3. Per ogni $x > 0$ esiste $y \in [1, 2]$ tale che $x \sim y$. Per ogni $x < 0$ esiste $y \in [-2, -1]$ tale che $x \sim y$. Quindi $Y = \pi([-2, -1] \cup [1, 2])$. $[1, 2]$ e $[-2, -1]$ sono entrambi compatti e l'unione finita di compatti è compatta, quindi $[-2, -1] \cup [1, 2]$ è compatto. L'immagine di un compatto tramite una funzione continua è compatto quindi Y è compatto.

Si noti che usando il logaritmo si dimostra agilmente che Y è omeomorfo a l'unione disgiunta di due cerchi, mentre X è costituito da due cerchi piú un punto che ha come unico intorno X stesso.

ESERCIZIO 2, punti 4+4+4

Siano τ e σ due topologie su un isieme X. Dimostrare o trovare un controesempio per ciascuna delle seguenti affermazioni.

1. σ è piú fine di τ se per ogni spazio topologico Y e per ogni $f : X \to Y$, se f è continua rispetto a τ allora lo è anche rispetto a σ.

2. σ è piú fine di τ se per ogni spazio topologico Y e per ogni $f : X \to Y$, se f è continua rispetto a σ allora lo è anche rispetto a τ.

3. σ è piú fine di τ se esiste uno spazio Y tale che per ogni $f : X \to Y$, se f è continua rispetto a τ allora lo è anche rispetto a σ.

SOLUZIONE

1. VERA. Se per ogni spazio topologico Y e per ogni $f : X \to Y$, se f è continua rispetto a τ allora lo è anche rispetto a σ, ció sarà vero anche per $f = id : (X, \tau) \to (X, \tau)$. Ne segue che id è continua anche come funzione $(X, \sigma) \to (X, \tau)$ e dunque ogni aperto di τ è anche aperto di σ.

2. FALSA. Come controesempio consideriamo uno spazio X con almeno tre elementi, usando come τ la topologia discreta (ogni insieme è aperto) e come σ la banale (solo il vuoto e X sono aperti). Ogni funzione è continua rispetto a σ lo è anche rispetto a τ ma σ non è piú fine di τ.

3. FALSA. Siano τ e σ due topologie non equivalenti su uno spazio X e sia Y un insieme con un solo elemento. Ogni funzione a valori in Y è continua indipendentemente dalla topologia dello spazio di partenza.

ESERCIZIO 3, punti 5+5+5

Sia $X = \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta e sia $A \subset X$ il seguente sottospazio

$$A = \{(x, y) \in X : \ x^2 + y^2 < \pi\} \setminus \{(x, y) \in X : \ y = 0, x > 0\}$$

1. Determinare chiusura, frontiera e parte interna di A in X.

2. Dire se la chiusura di A in X è uno spazio compatto.

3. Dire se la chiusura di A in X è omeomorfa a $\mathbb{Q}^2$.

SOLUZIONE

1. La chiusura di A è l'intersezione con X della chiusura B di A in $\mathbb{R}^2$. Infatti $B \cap X$ è chiuso in X e contiene A; se C è un chiuso di X contenente A allora esiste D chiuso di $\mathbb{R}^2$ tale che $A \subset C = D \cap X$ e dunque D contiene B, ergo C contiene $B \cap X$. La chiusura di A in $\mathbb{R}^2$ è chiaramente $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq \pi\}$. Quindi

$$\bar{A} = \{(x, y) \in X : \; x^2 + y^2 \leq \pi\} = \{(x, y) \in X : \; x^2 + y^2 < \pi\}.$$

   La parte interna di A è $A \setminus \{(0, 0)\}$. Tale insieme è aperto perchè $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ e quindi $\{(x, y) \in R : \; x^2 + y^2 < \pi\} \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$ e la sua intersezione con X è $A \setminus \{(0, 0)\}$. In oltre, $(0, 0)$ non è un punto interno di A perché ogni intorno di $(0, 0)$ contiente punti di $\{(x, 0) : x > 0, x \in \mathbb{Q}\}$ (che sta nel complementare di A in X.)

   Ne segue che la frontiera di A in X è l'insieme $\{(x, 0) : 0 \leq x < \pi, x \in \mathbb{Q}\}$.

2. $\bar{A}$ NON è compatto. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione monotona crescente che tende a π. Sia $U_n = \{(x, y) \in X : x^2 + y^2 < a_n\}$. U_n è aperto e per ogni $(x, y) \in \bar{A}$ esiste n tale che $x^2 + y^2 < a_n$ perchè $a_n \to \pi$ e π non è razionale. Quindi $\{U_n\}$ è un ricoprimento di aperti di $\bar{A}$. Sia ora $U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$ una sotto famiglia finita e sia $m = \max\{i_n\}$. Allora l'unione degli U_{i_n} è esattamente U_m. Siccome $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ esiste $x_m \in \mathbb{Q}$ appartenente all'intervallo $(-\sqrt{\pi}, -\sqrt{a}_m)$. Il pundo $(x_m, 0)$ sta quindi in $\bar{A}$ ma non in U_m. Ne segue che nessuna sottofamiglia finita di $\{U_n\}$ è un ricoprimento di $\bar{A}$.

3. La risposta è SI. Dimostriamo prima che un qualsiasi intervallo aperto di $\mathbb{Q}$ è omeomorfo a $\mathbb{Q}$. Sia $I = (a, b)$ un intervallo di $\mathbb{Q}$. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset I$ una successione strettamente monotona crescente tale che a_n converge ad a per $n \to -\infty$ ed a b per $n \to \infty$.

   Definiamo una funzione da $\mathbb{Q}$ a I come segue. Su $\mathbb{Z}$ poniamo $f(m) = a_m$. Sull'intervallo $(m, m + 1)$ poniamo $f(m + t) = (1 - t)a_m + ta_{m+1}$; si noti che se $t \in \mathbb{Q}$ allora $f(m + t) \in \mathbb{Q}$. Si verifica facilmente che f è un omeomorfismo.

   In particolare ció vale per $a = -\sqrt{\pi}$ e $b = \sqrt{\pi}$. Possiamo quindi costruire un omeomorfismo φ tra $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^2$ ponendo $\varphi(x, y) = (f^{-1}(x), y)$. Sia $Y = \varphi(A) \subset \mathbb{Q}^2$. L'insieme Y è chiaramente omeomorfo ad A ed è meglio descritto da

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : -\sqrt{\pi - f(x)^2} < y < \sqrt{\pi - f(x)^2}\}$$

Mostriamo adesso che Y è omeomorfo a $\mathbb{Q}^2$ ed avremo finito. Sia $g(x) = \sqrt{\pi - f(x)^2}$, cosí che

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : -g(x) < y < g(x)\}$$

Adesso sia $\{\alpha_n\}_{n \in Z}$ una successione di funzioni $\alpha_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con le seguenti proprietà.

(a) $\{\alpha_n\}$ è strettamente monotona crescente ($\forall x, \alpha_n(x) < \alpha_{n+1}(x)$);

(b) per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$;

(c) $\alpha_n(x)$ tende a $g(x)$ per $n \to \infty$;

(d) $\alpha_n(x)$ tende a $-g(x)$ per $n \to \infty$;

Tale successione si costruisce facilmente usando delle funzioni lineari a tratti.

Definiamo adesso $F : \mathbb{Q}^2 \to Y$ come segue. Su $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ poniamo $F(x, n) = (x, \alpha_n(x))$ e poi procediamo come prima ponendo, per $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{Z}$

$$F(x, m + t) = (x, (1 - t)\alpha_n(x) + t\alpha_{n+1}(x)).$$

Si verifica che F è un omeomorfismo.