ESAME DI GEOMETRIA 2. 11-06-2013,
SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Per ogni $n \in \mathbb{N}, n > 0$ sia $B_n = (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ e sia $A = \bigcup_n B_n$. Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ ottenuto facendo il cono di $A \times \{1\}$ sull'origine; ossia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = ay, a \in A\}$$

(1) Determinare la parte interna di X.
(2) Determinare la chiusura $\bar{X}$ di X in $\mathbb{R}^2$.
(3) Determinare la frontiera di X.
(4) Si dica se X è connesso.
(5) Si dica se $\bar{X}$ è localmente connesso.
(6) Si dica se lo spazio Y ottenuto da $\mathbb{R}^2$ collassando X a un punto è Hausdorff.
(7) Si dica se lo spazio Z ottenuto da $\mathbb{R}^2$ collassando $\bar{X}$ a un punto è Hausdorff.

SOLUZIONE

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x/y$. La f è continua perché stiamo considerando punti con $y \neq 0$. D'altronde, l'unico punto di X con la $y = 0$ è l'origine. Per definizione $X \setminus \{0\} = f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto in quanto unione di intervalli aperti, $X \setminus \{0\}$ è aperto. Dunque la parte interna di X contiene $X \setminus \{0\}$. D'altronde l'origine non è un punto interno di X perchè ogni intorno dell'origine contiene punti del tipo $(0, y)$, che non stanno in X. Ne segue che la parte interna di X è esattamente $X \setminus \{0\}$.
(2) Sia f come sopra. Se $\bar{A}$ indica la chiusura di A in $\mathbb{R}$, posto $W = f^{-1}(\bar{A})$ si ha che W è un chiuso di $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. Se (x, y) è un punto di W allora $a = x/y \in \bar{A}$ e dunque ogni intorno di (x, y) contiene punti (p, q) tali che p/q sta in A. Quindi $W \subset \bar{X}$. Siccome $A \subset (0, 1)$, X è contenuto in $C = \{(x, y) : x \geq 0\} \cap \{(x, y) : x \leq y\}$, che è intersezione di chiusi e quindi chiuso. Quindi $\bar{X} \subset C$. Siccome $W \subset C$ e $C \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ contiene solo l'origine resta da vedere se l'origine stia in $\bar{X}$ e ció è vero perché per definizione si ha $(0, 0) \in X \subset \bar{X}$. In conclusione $\bar{X}$ è costituito da $W \cup \{(0, 0)\}$.
(3) La frontiera di X è data dalla differenza tra chiusura e parte interna, quindi è l'unione delle rette $\{y = nx, n \in \mathbb{N}, n > 0\} \cup \{x = 0\}$
(4) X è connesso per archi in quanto è unione di rette per l'origine. Quindi è connesso.
(5) $\bar{X}$ non è localmente connesso. Infatti, sia $p = (0, 1) \in \bar{X}$ e sia $U = \bar{X} \cap \{(x, y) : y \in (1/2, 3/2)\}$. Per ogni intorno $V \subset U$ di p, la restrizione di f a V ha immagine in un intorno di zero di $\bar{A}$, che non è mai connesso. Quindi V non può essere connesso.
(6) In un Hausdorff i punti son chiusi, siccome X non è chiuso, Y non è Hausdorff.
(7) Siccome $\bar{X}$ è chiuso, se $x \notin \bar{X}$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \notin X$. Ne segue che $B(x, \varepsilon/3)$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(x, \varepsilon/2)}$ sono aperti disgiunti, l'uno che contiene x le l'altro $\bar{X}$. Dunque sono due aperti saturi le cui immagini sono aperti disgiunti in Z, l'uno che contiene $[x]$ e l'altro $[X]$. Dunque Z è Hausdorff.

ESERCIZIO 2 (punti 2+2+2+4+4) Per ogni vettore v di $\mathbb{R}^2$ sia T_v la traslazione lungo v:

$$T_v(x) = x + v.$$

Siano $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $v_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e sia G il gruppo di omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato da $T_{v_1}, T_{v_2}, T_{v_3}$. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}^2$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in G : g(x) = y$$

(1) X è connesso?
(2) X è compatto?
(3) Dimostrare che la classe di equivalenza di $(0, 0)$ contiene solo punti isolati.
(4) Dimostrare che la classe di equivalenza di ogni $(x, y) \in R^2$ contiene solo punti isolati.
(5) Dimostrare che X è omeomorfo al toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

SOLUZIONE Siccome $v_2 - v_3 = (1, 0)$, il gruppo G è generato dai soli v_2, v_3, oppure dai soli v_1, v_2. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to X$ la proiezione naturale.

(1) X è connesso perché immagine di $\mathbb{R}^2$, che è connesso, tramite la proiezione naturale che è continua.
(2) Le tralsazioni lungo $(1, 0) = v_1$ e $(0, \sqrt{3}) = v_2 + v_3$ appartengono a G. Ne segue che ogni punto di $\mathbb{R}^2$ può essere traslato tramite elementi di G sino ad avere la componente x in $[0, 1]$ e la componente y in $[0, \sqrt{3}]$. Ne segue che $X = \pi([0, 1] \times [0, \sqrt{3}])$. Siccome $[0, 1] \times [0, \sqrt{3}]$ è compatto in quanto prodotto di compatti e siccome π è continua, X è compatto.
(3) Siccome G è generato dalle traslazioni lungo v_2 e v_3, le ascisse degli elementi di $[(0, 0)]$ sono multipli di $1/2$, mentre le ordinate sono multipli di $\sqrt{3}/2$. Ne segue che $[(0, 0)]$ è costituita da punti isolati.
(4) Se $(x, y) \sim (x', y')$ allora $(x - x', y - y') \sim (0, 0)$. Ne segue che $[(x, y)] = (x, y) + [(0, 0)]$ e quindi per il punto precedente è il traslato di un insieme di punti isolati e quindi ha solo punti isolati.
(5) Come detto sopra, G è generato da v_2 e v_3. Sia F l'isomorfismo lineare di $\mathbb{R}^2$ che manda v_2 in $(1, 0)$ e v_3 in $(0, 1)$. Tale isomorfismo esiste perchè v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Sia $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ il toro ottenuto come quoziente di $\mathbb{R}^2$ per la relazione $x \sim' y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$ e sia $\pi' : \mathbb{R}^2 \to T$ la proiezione naturale. Per definizione di F, la mappa $\pi' \circ F : \mathbb{R}^2 \to T$ è costante sulle classi di equivalenza. Per la proprietà universale del quoziente discende a una mappa continua $f : X \to T$. Allo stesso modo, l'inversa di F produce l'inversa di f che quindi risulta essere un omeomorfismo.

ESERCIZIO 3 (punti 3+3+3+3) Per ogni sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$, sia X^c il suo complementare. Dimostrare o trovare un controesempio per ciascuna delle seguenti affermazioni.

(1) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un omeomorfismo allora X^c è omeomorfo a $f(X)^c$.
(2) Esiste $X \subset \mathbb{R}^2$ tale che X è omeomorfo a X^c.
(3) Se X e Y sono omeomorfi allora lo sono anche X^c e Y^c.
(4) Se X^c e Y^c sono omeomorfi allora lo sono anche X e Y.

SOLUZIONE

(1) Vera. La restrizione di f a X^c è continua. Siccome f è iniettiva, anche la sua restrizione a X^c lo è. In oltre, sempre per l'iniettività, $f(X^c) = f(X)^c$. Lo stesso ragionamento applicato a f^{-1} fornisce l'inversa di $f|_{X^c}$ che quindi risulta essere un omeomorfismo tra X^c e $f(X)^c$.
(2) Vera. Basta prendere $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2n, 2n + 1), n \in \mathbb{Z}\}$, la traslazione $(x, y) \to (x + 1, y)$ fornisce l'omeomorfismo tra X e X^c.
(3) Falsa. Sia X un semipiano aperto e $Y = \mathbb{R}^2$. X e Y sono omeomorfi ma il complementare di Y è vuoto mentre quello di X no.
(4) Falsa. Basta prendere X^c e Y^c con X e Y come sopra.