

GeoSup 2013. Schizzi degli argomenti di alcune dimostrazioni.

## 1. CARATTERISTICA DI EULERO E CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI

$S$  sarà sempre una superficie orientabile compatta e senza bordo.

1.1. **Caratteristica.** Per ogni triangolazione  $\tau$  di uno spazio topologico  $X$  definiamo

$$\chi(\tau) = V - L + F$$

ove  $V, L, F$  denotano il numero dei vertici, lati e facce di  $\tau$ . È un fatto che tale numero non dipende da  $\tau$  ma solo da  $X$ , quindi scriveremo  $\chi(X)$ . È la caratteristica di Eulero-Poincaré di  $X$ .

**Esempio.**  $\chi(S^1) = 0$ ,  $\chi(D^2) = 1$ ,  $\chi(\text{un punto}) = 1$ ,  $\chi(\text{un anello}) = 0$ .

**Esempio.** Sia  $X$  il bouquet di  $k$  copie di  $S^1$ , allora  $\chi(X) = 1 - k$ .

Il seguente fatto è di immediata dimostrazione contando i semplici

**Fatto** (*Principio di inclusione esclusione*).

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

**Corollario** (*Taglio di un manico*). Se  $S'$  è ottenuta tagliando  $S$  lungo una curva chiusa semplice e tappando con dei dischi le due componenti di bordo risultanti dal taglio, allora

$$\chi(S') = \chi(S) + 2.$$

L'operazione inversa a quella descritta corrisponde all'attaccamento di un 1-manico a  $S'$ .

1.2. **L'algoritmo del topo.** Data una triangolazione di  $S$  pensiamo i triangoli come fatti di formaggio ed inseriamo un topo famelico all'interno di un triangolo. Il topo famelico segue le seguenti regole: Se sta dentro un triangolo ne mangia tutto l'interno; si muove nello spazio che si è liberato mangiando triangoli; finito un triangolo cerca un lato che abbia un triangolo di formaggio pieno dall'altro lato, appena lo trova ne mangia l'interno (lascia i vertici) ed entra nel triangolo adiacente e ne mangia l'interno. Quando non è più possibile continuare comincia a mangiare le bucce: cerca un vertice a cui sia attaccato uno solo lato e mangia quel vertice e quel lato. Ripete la ricerca. Quando non può più mangiare nulla secondo le regole precedenti si ferma.

Il questo modo il topo ha ottenuto il risultato seguente: ad ogni passo la parte mangiata è omeomorfa a un disco. Alla fine quello che rimane è un grafo senza vertici di valenza uno oppure un singolo punto.

**Fatto.** Un grafo con almeno un lato e senza vertici di valenza uno ha caratteristica  $\leq 0$ .

*Dimostrazione.* Basta contare i semplici e notare che, detta  $m_i$  la molteplicità del vertice  $i$  si ha  $2L = \sum m_i$  e  $\sum m_i \geq 2V$ .  $\square$

**Corollario.**  $\chi(S) \leq 2$ .

*Dimostrazione.* Per l'algoritmo del topo  $S$  è ottenuta attaccando un disco a un grafo oppure a un punto, lungo un anello (intorno regolare dei bordi). Se alla fine è rimasto un punto  $\chi(S) = \chi(\text{punto}) + \chi(\text{disco}) - \chi(\text{anello}) = 1 + 1 - 0 = 2$ . Altrimenti  $\chi(S) = \chi(\text{grafo}) + \chi(\text{disco}) \leq 1$ .

**1.3. Classificazione.** Se in  $S$  esiste una curva chiusa semplice che non la sconnette, allora procediamo al taglio di un manico lungo tale curva. La caratteristica sale di 2. Siccome  $\chi(S) \leq 2$  possiamo ripetere questo step al più un numero finito di volte e ridurci al caso in cui ogni curva chiusa semplice in  $S$  la sconnetta. In questo caso l'algoritmo del topo finisce con un sol punto rimanente. Infatti, visto che quello che togliamo è un disco, che è connesso, se rimanesse un grafo allora ogni curva chiusa semplice del grafo non sconetterebbe  $S$ . Dunque  $S$  è ottenuta attaccando un disco ad un intorno regolare di un punto, che è un disco. Quindi  $S = S^2$ . Ne segue che

**Teorema.** Ogni superficie compatta connessa orientata è ottenuta attaccando  $g$  manici ad  $S^2$ . Da cui  $\chi(S) = 2 - 2g$ .

Il numero  $g$  si chiama genere di  $S$ .

**Fatto.**  $\dim(H_1(S)) = \dim(H^1(S)) = 2g$ .

## 2. INDICE DI CAMPI DI VETTORI E FORMULE D'INDICE

Il libro di riferimento per questa sezione è il Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint" noto anche come "Milnorino". Si trova in rete e in tutte le biblioteche (di solito).

Sia  $v$  un campo differenziabile di vettori tangenti su una varietà  $M$  di dimensione  $n$ . Sia  $x$  uno zero isolato di  $v$ . Localmente  $V$  lo si può vedere come una mappa da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . Quello che diremo sarà invariante per diffeomorfismi (anche se qui non lo dimostriamo) per cui ragioneremo sempre in carte locali. Localmente possiamo supporre che  $x$  sia l'unico zero di  $v$ . Fuori da  $x$  possiamo definire il campo normalizzato  $\bar{v} = v/||v||$ . La restrizione di  $\bar{v}$  a una sferetta di raggio  $r$  centrata in  $x$  fornisce una mappa  $\bar{v}_r : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Variando  $r$  si ottiene un'omotopia tra le varie  $\bar{v}_r$  che quindi hanno tutte lo stesso grado.

**Definizione.** L'indice di  $v$  in  $x$  è il grado di  $\bar{v}_r$ .

**Fatto.** Se  $x$  è uno zero non degenero (cioè  $dv \neq 0$  in  $x$ ) allora  $dv : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un'applicazione lineare invertibile. In tal caso l'indice di  $v$  in  $x$  è  $\pm 1$  a seconda che  $\det dv$  sia positivo o negativo.

*Dimostrazione.* Supponiamo  $x = 0$ . Allora  $F(x, t) = v(xt)/t$  fornisce un'omotopia tra  $v$  e  $dv$ .

**Lemma (Teorema di Hopf).** Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  è una sotto varietà con bordo di dimensione  $n$  e  $v$  è un campo di vettori su  $M$  con zeri isolati e tale che su  $\partial M$  punti sempre all'esterno di  $M$ , allora la somma degli indici degli tali zeri di  $v$  è uguale al grado dell'applicazione di Gauss  $\partial M \rightarrow S^{n-1}$  (quella che associa a un punto di  $\partial M$  il vettore normale unitario uscente).

*Dimostrazione.* Sia  $M_0$  la varietà ottenuta da rimuovendo  $M$  delle pallette disgiunte tra loro attorno ad ogni zero di  $v$ . Su  $M_0$  è ben definito il campo  $\bar{v} = v/||v||$ , che è una applicazione  $\bar{v} : M_0 \rightarrow S^{n-1}$  se  $w$  è un valore regolare di  $\bar{v}$  allora  $\bar{v}^{-1}(w)$  è una 1-sottovarietà di  $M_0$  con bordo su  $\partial M_0$ . Ne segue che il grado di  $\bar{v}$  su  $\partial M$  è zero. Ma su  $\partial M$   $\bar{v}$  è omotopa alla mappa di Gauss mentre su  $\partial M_0 \setminus \partial M$  la somma dei gradi fornisce la somma degli indici degli zeri di  $v$ . La conclusione segue.  $\square$

**Lemma.** Ci si può sempre ricondurre al caso di zeri isolati.

*Dimostrazione.* basta perturbare un po' il campo che è sempre supposto liscio e quindi per il lemma di Sard esistono valori regolari.

**Lemma.** ci si può sempre ricondurre al caso di zeri non degeneri: Sia  $v$  un campo con uno zero isolato  $x$ . Per ogni  $U$  intorno di  $x$  esistono intorni  $B_1 \subset B_2 \subset U$  di  $x$  ed un campo  $w$  tali che

- Fuori da  $B_2$ ,  $w = v$
- $w$  non ha zeri in  $B_2 \setminus B_1$
- in  $B_1$   $w$  ha solo zeri non degeneri.

*Dimostrazione.* Ci si mette in coordinate locali in cui  $x = 0$  sia l'unico zero. Si prende una funzione  $f$  liscia a valori in  $[0, 1]$  che valga 1 in  $B(0, 1)$  e zero fuori da  $B(0, 2)$ . Si prende un valore regolare  $v_0$  (di modulo che sceglieremo dopo) di  $v$  che esiste per il lemma di Sard. Si costruisce il campo  $w = v - v_0 f$ . Gli zeri di  $w$  soddisfano  $v(x) = f(x)v_0$ , se  $v_0$  è sufficientemente piccolo (più piccolo di  $\inf_{B(0,2) \setminus B(0,1)} ||v||$ ) ciò implica che se  $x$  sta in  $B(0, 2)$  allora  $x \in B(0, 1)$ , ergo  $f(x) = 1$  e  $w = v - v_0$  da cui  $dw(x) = dv(x)$ . Siccome  $v_0$  è valore regolare  $v(x) = v_0$  implica  $dv$  invertibile e quindi  $dw$  invertibile in  $x$ .  $\square$

**Corollario.** La somma degli indici degli zeri di  $w$  in  $B_2$  è uguale all'indice dello zero  $x$  di  $v$ .

*Dimostrazione.* Basta prendere  $U$  contenuto nella palletta  $P$  che si usa per calcolare l'indice di  $v$ . Rimuovendo pallette  $P_i$  intorno agli zeri di  $w$  in  $B_1$  si ha che il grado totale di  $\bar{w}$  su  $\partial(P \setminus \{P_i\})$  è zero per cui il grado su  $\partial P$  è uguale alla somma dei gradi sui  $\partial P_i$  (si noti che le orientazioni di  $\partial P_1$  indotte da  $P_i$  e da  $P \setminus \{P_i\}$  sono opposte).

**Lemma.** Sia  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compatta orientabile senza bordo e sia  $v$  un campo liscio di vettori tangenti a  $S$  con zeri isolati non degeneri. Sia  $N$  un intorno regolare di  $S$ . Allora la somma degli indici degli zeri di  $v$  è uguale al grado della mappa di Gauss di  $\partial N$ . In particolare tale somma non dipende da  $v$ .

*Dimostrazione.* Per  $x \in N$  sia  $r(x)$  la proiezione di  $x$  su  $S$ , ossia il punto di  $S$  più vicino a  $x$ . Sia  $w = v(r(x)) + x - r(x)$  un campo su  $N$ . Chiaramente  $w = v$  su  $S$ . In oltre se  $w(x) = 0$  allora  $v(r(x)) = x - r(x)$ , ma  $x - r(x)$  è ortogonale a  $S$  mentre  $v$  è tangente per cui  $x \in S$  e  $v(x) = 0$ . Cioè  $w$  e  $v$  hanno gli stessi zeri. Infine calcoliamo l'indice di  $w$  in un suo zero.  $dw = dvdr + Id - dr$ . Quindi se mi muovo lungo  $TS$  ho che  $dr = Id$  e  $dw = dv$  mentre se mi muovo in direzione ortogonale ho che  $dr = 0$  e  $dw = Id$ . Ne segue che  $dw$  è non degenera ed il determinante di  $dw$  ha lo stesso segno di  $dv$ .

Il campo  $\bar{w}$  su  $\partial N$  punta fuori se  $N$  è sufficientemente piccolo per cui la combinazione convessa con la mappa di Gauss fornisce un'omotopia tra le due (entrambe puntano fuori quindi  $t\bar{w} + (1-t)Gauss$  non può mai essere nullo. Quindi  $\bar{w}$  ha lo stesso grado della mappa di Gauss sul bordo di  $N$ . Per il Teorema di Hopf  $\sum i_x(w) = \deg(Gauss)$ . e sappiamo che  $\sum i_x(w) = \sum i_x(v)$ .  $\square$

Si noti che la dimostrazione appena fatta in  $\mathbb{R}^3$  vale per una qualsiasi sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  di qualsiasi dimensione.

Sia ora  $v$  un campo su  $S$  con zeri isolati.

**Teorema (Poincaré-Hopf).**  $\sum i_x = \chi(S)$ .

*Dimostrazione.* Per la riduzione al caso non degenera possiamo supporre gli zeri non degeneri. Siccome per tali campi  $\sum i_x$  non dipende dal campo di vettori è sufficiente esibire un campo di vettori con tali proprietà. Su un triangolo sia  $f$  una funzione liscia che abbia: un massimo nel baricentro, un minimo per ogni vertice e una sella nel punto medio di ogni lato. Sia il campo gradiente di  $f$ . Per costruzione sia  $f$  che il campo si estendono a una triangolazione qualsiasi di  $S$ . Si controlla che nei massimi e nei minimi locali di una funzione, il campo

gradiente ha sempre indice 1, mentre nei punti di sella ha indice  $-1$ . Ne segue che la somma degli indici degli zeri di  $v$  porta un contributo 1 per ogni triangolo,  $-1$  per ogni lato e 1 per ogni vertice. Il totale fa  $L - V + F = \chi(S)$ .  $\square$

**Fatto.** La stessa dimostrazione vale in dimensione qualsiasi.

**Corollario.** Se  $M$  ha dimensione dispari ed è senza bordo allora  $\chi(M) = 0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $v$  un campo su  $M$  con zeri isolati non degeneri. Siccome la dimensione  $n$  di  $M$  è dispari l'antipodale di  $R^n$  inverte l'orientazione<sup>1</sup>. Quindi  $-v$  ha zeri con indici di segno opposto a quelli di  $v$ . Ne segue che

$$\chi(M) = \sum i_x(v) = \sum i_x(-v) = - \sum i_x(v) = -\chi(M)$$

$\square$

**Corollario.** Se  $M$  è una varietà compatta a bordo e se  $v$  è un campo di vettori tangente a  $M$  che punta fuori al bordo, allora  $\sum i_x$  non dipende da  $v$ .

*Dimostrazione.* Si considera il doppio di  $M$ , ossia la varietà ottenuta prendendo una copia  $\bar{M}$  di  $M$ , con l'orientazione opposta ed attaccandola a  $M$  lungo il bordo comune. Su  $\bar{M}$  si considera il campo  $-v$ , che punta dentro al bordo. L'unione dei campi  $v$  su  $M$  e  $-v$  su  $\bar{M}$  fornisce un campo sul doppio di  $M$ , che è una varietà senza bordo. Quindi  $\sum i(v) + \sum i(-v)$  non dipende da  $v$ . Sia ora  $w$  un altro campo su  $M$  che punta fuori al bordo. Siccome entrambi  $v$  e  $w$  puntano fuori la loro combinazione convessa fornisce un'omotopia tra loro. In particolare posso perturbare  $w$  in un intorno di  $\partial M$  senza introdurre nuovi zeri in modo che  $w = v$  sul bordo. Quindi posso fare il campo sul doppio di  $M$  dato da  $w$  su  $M$  e  $-v$  su  $\bar{M}$ . Ne segue che

$$\sum i(w) + \sum i(-v) = \sum i(v) + \sum i(-v).$$

$\square$

### 3. FORME E CAMPI OLOMORFI

Il libro di riferimento per questa sezione è il Donaldson: "Riemann Surfaces", capitoli 5,6,7. (Oxford graduate text in mathematics n. 22; c'è in biblioteca da noi.)

<sup>1</sup>come avete giustamente osservato a lezione!

**3.1. Fibrato tangente.** (Meglio tardi che mai) Data una varietà  $M$  con atlante differenziabile  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  il fibrato tangente  $TM$  si costruisce/definisce come segue. In carte locali, lo spazio tangente a  $\mathbb{R}^n$  nel punto  $x$  è  $\mathbb{R}^n$ :

$$T\mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}^n.$$

Su un aperto coordinato  $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$  si definisce il fibrato tangente come  $V \times \mathbb{R}^n$  con  $(TV_\alpha)_x$  identificato con  $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ . A questo punto un atlante per  $TM$  è formato da aperti  $V_\alpha \times \mathbb{R}^n$  e i cambi di carta sono dati da

$$TV_\alpha \ni (x, v) \mapsto (\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1}(x), d(\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1})(x)[v]) \in TV_\beta.$$

Lo spazio definito in questo modo è una famiglia continua di spazi vettoriali ( $\mathbb{R}^n$ ) parametrizzati con punti di  $M$ :  $TM = \{TM_x, x \in M\}$ .  $M$  si chiama base e  $TM_x$  fibra. La proiezione naturale  $(x, v) \rightarrow x$  da  $TM \rightarrow M$  che dimentica  $v$  e si ricorda solo del punto base si indica di solito con  $\pi$ .

Questa definizione si generalizza alla definizione/costruzione di fibrato vettoriale qualsiasi ove invece di  $\mathbb{R}^n$  si usa uno spazio vettoriale qualsiasi e al posto dei differenziali dei cambi di carta si usano delle opportune funzioni di transizione che di fatto caratterizzano il fibrato.

Una sezione di un fibrato è una mappa  $s : M \rightarrow TM$  tale che  $\pi(s(x)) = x$ . Cioè  $s(x) = (x, v(x))$  con  $v \in TM_x$ .

Le sezioni del fibrato tangente si chiamano campi di vettori e sono identificate col modulo delle derivazioni sull'anello delle funzioni differenziabili. In coordinate,  $\{\partial/\partial x_i\}$  è una base di  $TM_x$ .

**3.2. Forme olomorfe.** Restringiamoci per semplicità al caso di superfici. In due parole, si complessifica  $TS$  tensorizzando con  $\mathbb{C}$

$$TS \otimes \mathbb{C}$$

e se ne prende il duale complesso. Queste sono le forme complesse e quelle olomorfe sono quelle che trasformano la struttura complessa di  $\mathbb{R}^2$  (rotazione di  $\pi/2$  di  $\mathbb{R}^2$ ) nella moltiplicazione per  $i$ .

### 3.3. Forme olomorfe (e campi) step by step.

**DISCLAIMER:** *La confusione può nascere dal fatto che  $\mathbb{C}$  è  $\mathbb{R}^2$  come spazio reale ma il complessificato di  $\mathbb{R}^2$  è  $\mathbb{C}^2$  e quindi in un certo senso uno si ritrova a complessificare  $\mathbb{C}$  e gli viene  $\mathbb{C}^2$ .*

**HINT:** *I fisici coi conti ci chiappano. Usare il formalismo e l'intuizione alla "fisisco" aiuta. Parecchio.*

3.3.1. *Forme su  $\mathbb{R}^2$* . Ci mettiamo in coordinate locali e identifichiamo  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$  tramite la mappa

$$z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \quad z(x, y) = x + iy$$

In coordinate locali, la moltiplicazione per  $i$  si legge come la rotazione di  $\pi/2$ :  $i \cdot 1 = i$ ,  $i \cdot i = -1$  dunque  $i(1, 0) = (0, 1)$  e  $i(0, 1) = (-1, 0)$ . La struttura complessa indotta da  $z$  su  $\mathbb{R}^2$  è quindi rappresentata dalla matrice  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e cioè  $iz$  in coordinate reali si legge  $J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . In altri termini ancora  $z(J(x, y)) = iz(x, y)$ . Cioè la funzione  $z$  trasforma  $J$  nella moltiplicazione per  $i$ . Trasformare  $J$  nella moltiplicazione per  $i$  è quello che richiederemo alle cose per chiamarle olomorfe.

Lo spazio delle 1-forme a valori complessi su  $\mathbb{R}^2$  è  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  considerando  $\mathbb{C}$  come spazio reale. Cioè funzionali  $\omega$  tali che  $\omega(av + bw) = a\omega(v) + b\omega(w)$  e per ogni  $v, w \in \mathbb{R}^2$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si noti che  $\omega(v) \in \mathbb{C}$  è un numero complesso.  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  ha una struttura naturale di spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  data da

$$(a\omega + b\eta)(v) = a\omega(v) + b\eta(v)$$

per ogni  $\omega, \eta \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  e  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Le forme  $dx$  e  $dy$  sono una base su  $\mathbb{C}$  di  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ . (In coordinate  $dx$  è il vettore riga  $(1, 0)$  e  $dy$  il vettore  $(0, 1)$ , sono i duali della base canonica di  $\mathbb{R}^2$ , complessificati.) Quindi una base di  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  è anche data da

$$dz = dx + idy$$

$$d\bar{z} = dx - idy$$

Si noti che  $dz$  è proprio il differenziale dell'applicazione  $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , che vive per l'appunto in  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ .

Questa descrizione è puntuale. Succede come coi campi di vettori: punto per punto ho una fibra che è uno spazio vettoriale, e le sezioni — i campi di vettori — sono un modulo sull'anello delle funzioni differenziabili. Quindi si può fare il fibrato delle 1-forme e prenderne sezioni, queste sono propriamente le 1-forme su  $\mathbb{R}^2$ : Una 1-forma complessa su  $\mathbb{R}^2$  è una applicazione  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ . Il modulo delle 1-forme su  $\mathbb{R}^2$  si indica con  $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$  o semplicemente  $\Omega^1$  (ed è un modulo libero). Le forme  $dx, dy$  continuano a essere una base per  $\Omega^1$ , così come le forme  $dz, d\bar{z}$ .

3.3.2. *Funzioni olomorfe su  $\mathbb{R}^2$* . Sia ora  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione differenziabile in senso reale, ossia con parte reale e immaginaria differenziabili. Che cosa vuol dire che  $f$  è olomorfa quando si identifica  $\mathbb{R}^2$

con  $\mathbb{C}$ ? Il differenziale di  $f$  è una 1-forma complessa

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}).$$

Richiedere che  $f$  sia olomorfa è equivalente a chiedere che la sua approssimazione al prim'ordine sia  $\mathbb{C}$ -lineare e quindi abbia senso considerare la derivata in senso complesso.

Questo si traduce con il fatto che  $df$  trasforma  $J$  nella moltiplicazione per  $i$ .

$$df(JV) = idf(V)$$

Se  $V = (V_x, V_y)$  allora  $JV = (-V_y, V_x)$  da cui

$$-\frac{\partial f}{\partial x} V_y + \frac{\partial f}{\partial y} V_x = i\left(\frac{\partial f}{\partial x} V_x + \frac{\partial f}{\partial y} V_y\right)$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Le cui componenti reale e immaginaria non sono altro che le solite equazioni di Cauchy-Riemann.

Nel nostro formalismo  $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$  ci dice che  $df = \frac{\partial f}{\partial x}(dx + idy) = adz$  con  $a = \partial f/\partial x$ . Cioè  $f$  è olomorfa, o meglio  $J$ -olomorfa, se e solo se  $df$  è un multiplo di  $dz$ .

Una forma olomorfa su  $\mathbb{R}^2$  è il differenziale di una funzione olomorfa. In particolare, le forme olomorfe vivono nel modulo generato da  $dz$ . (Equivalentemente, una forma  $\omega$  su  $\mathbb{R}^2$  è olomorfa se esiste  $f$  olomorfa tale che  $\omega = fdz$ .)

**3.3.3. Campi di vettori complessi.** Se uno è un fisico complessifica il tangente immaginando che un campo è un insieme di freccioline tangenti, ognuna delle quali ha una determinata lunghezza... complessa! E questo in fin dei conti funziona bene.

Più formalmente si considera l'anello  $\mathcal{E}$  delle funzioni  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  differenziabili in senso reale e il modulo  $\mathcal{D}$  delle derivazioni complesse su  $\mathcal{E}$ . Ossia il modulo delle applicazioni  $X : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  tali che

- $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ ,
- $X(f + g) = X(f) + X(g)$ ,
- $X(\lambda) = 0$

per ogni  $f, g \in \mathcal{E}$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Una base è data da  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ . (Anche qui, punto per punto abbiamo uno spazio vettoriale che non è altro che  $(T\mathbb{R}^2)_x \otimes \mathbb{C}$ , le sezioni sono un modulo.)



Una base alternativa è data da

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Ove la condizione di olomorfia per  $f$  si legge  $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ .

ATTENZIONE:  $\partial f / \partial z \neq df / dz$ . Gli operatori  $\partial / \partial z$  e  $\partial / \partial \bar{z}$  sono operatori differenziali reali ed esistono sempre, per qualsiasi  $f$  che sia differenziabile in senso reale, cioè tale che le sue componenti reale complessa siano differenziabili. Mentre  $df / dz$  indica la derivata in senso complesso, e questa per definizione esiste solo se  $f$  è olomorfa.

ATTENZIONE: Le derivazioni complesse sono sezioni del complessificato del tangente, quindi punto per punto abbiamo tra le mani un  $\mathbb{C}^2$  di cui il nostro  $\mathbb{R}^2$  di partenza rappresenta la parte reale. (Anche se quando identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  la “ $y$ ” rappresenta la parte immaginaria.)

3.3.4. *Gli operatori  $\partial$  e  $\bar{\partial}$ .* Le forme  $dx$  e  $dy$  continuano ad essere duali di  $\partial / \partial x$  e  $\partial / \partial y$  (anche se per ora formalmente le forme stanno in  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  e non in  $Hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ , che è il duale del complessificato di  $\mathbb{R}^2$ ).

Si definiscono gli operatori  $\partial$  e  $\bar{\partial}$  come

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

Tale definizione si estende nel modo ovvio alle forme (tipo se  $\omega = f dz$  allora  $\bar{\partial} \omega = \bar{\partial} f d\bar{z} \wedge dz$ ).

Si ha

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \partial f + \bar{\partial} f$$

da cui

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

Si verifica che

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

da cui

$$\bar{\partial} \bar{f} = \bar{\partial} \bar{f}$$

come i fisici sanno bene senza fare i conti. Infine, si vede subito che (a livello di forme)  $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$  e che  $\partial \bar{\partial} = -\bar{\partial} \partial$ .

3.3.5. *Forme reloaded.* A questo punto si complessifica anche in partenza: ogni elemento di  $Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$  definisce un elemento di  $Hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$  imponendo la  $\mathbb{C}$ -linearità. Cioè  $\omega(a, b) = a\omega(1, 0) + b\omega(0, 1)$  per ogni  $a, b \in \mathbb{C}$ . Una forma sarà  $J$ -olomorfa se trasforma  $J$  nella moltiplicazione per  $i$ .  $dx, dy$  continuano a essere base, così come  $dz, d\bar{z}$ . Questa volta però  $dz, d\bar{z}$  è la base duale complessa di  $\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z}$  nel senso proprio del termine.

**Definizione.** Una 1-forma complessa  $\omega$  è di tipo  $(1, 0)$  se è un multiplo di  $dz$ , è di tipo  $(0, 1)$  se è un multiplo di  $d\bar{z}$ . Una 1-forma  $\omega$  si dice olomorfa se è di tipo  $(1, 0)$  e  $\bar{\partial}\omega = 0$ . Il modulo delle forme di tipo  $(1, 0)$  si indica con  $\Omega^{(1,0)}$  e quello delle  $(0, 1)$  con  $\Omega^{(0,1)}$ .

**Fatto.** È immediato dalla definizione che se  $\omega$  è olomorfa allora  $d\omega = 0$ .

**Definizione.** Una 1-forma complessa si dice meromorfa se è olomorfa fuori da un insieme discreto di punti ove presenta dei poli. Localmente  $\omega = f dz$  con  $f$  meromorfa.

3.3.6. *Cambi di coordinate e forme su superfici.* La nozione di forma complessa, di forma di tipo  $(1, 0)$  e di forma olomorfa, le nozioni degli operatori  $\partial$  e  $\bar{\partial}$  che abbiamo dato sin ora valgono in  $\mathbb{R}^2$  munito di una struttura olomorfa  $J$ . Se siamo in una superficie, possiamo dare queste definizioni in carte locali, ma si deve assicurarci che siano ben poste per cambi di carta. Mettiamoci quindi in questa situazione.

Sia  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un diffeomorfismo (reale) e sia  $w = \varphi(z)$ . Cioè la coordina complessa nel primo  $\mathbb{R}^2$  è  $z$  e nel secondo  $w$ . Sia  $\omega = adw + bd\bar{w}$  una forma complessa nella variabile  $w$ . Usando che  $w = \varphi(z)$ , si verifica che vale

$$\varphi^*(dw) = d\varphi \quad \varphi^*(d\bar{w}) = d\bar{\varphi}$$

(un fisico direbbe  $w = \varphi$  quindi  $dw = d\varphi$  e  $d\bar{w} = d\bar{\varphi}$ .) Quindi si ha

$$\varphi^*(\omega) = a(\varphi(z))d\varphi + b(\varphi(z))d\bar{\varphi} = ad\varphi + bd\bar{\varphi}$$

ora

$$ad\varphi + bd\bar{\varphi} = a(\partial\varphi + \bar{\partial}\varphi) + b(\partial\bar{\varphi} + \bar{\partial}\bar{\varphi})$$

da cui

$$ad\varphi + bd\bar{\varphi} = \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial z} + b\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)dz + \left(a\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} + b\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial \bar{z}}\right)d\bar{z}$$

ergo, se  $\omega$  è di tipo  $(1, 0)$ , cioè se  $b = 0$ , allora affinché  $\varphi^*(\omega)$  sia di tipo  $(1, 0)$  occorre che  $\bar{\partial}\varphi = 0$ . Si vede che questa condizione è necessaria e sufficiente affinché tutte le nozioni sopra descritte siano invarianti per cambi di carta. In altre parole, se (e solo se) i cambi di carta sono olomorfi allora funziona tutto bene.

Si definiscono quindi i moduli  $\Omega^1(S)$ ,  $\Omega^{(1,0)}(S)$ ,  $\Omega^{(0,1)}(S)$  delle forme complesse, su  $S$  e sono ben definiti gli operatori  $\partial, \bar{\partial}, d$ .

Se  $\omega = a(w)dw$  quindi,  $\phi^*\omega = a(\varphi(z))\varphi'dz$  e quindi in pratica quindi una 1-forma olomorfa  $\omega$  su  $S$  è il dato di un atlante olomorfo  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  per  $S$  e, per ogni  $\alpha$ , una 1-forma olomorfa  $f_\alpha dz$  con la proprietà che  $f_\alpha/f_\beta = (\varphi_\beta \circ (\varphi_\alpha)^{-1})'$  sull'intersezione. “Fisicamente” se  $w = \varphi$  allora  $adw = ad\varphi = a\varphi'dz$ .

Si noti che la forma  $dz$  è ben definita nelle carte locali ma non in tutta  $S$ . Questo sarà ancora più esplicito nella prossima sezione.

Si noti infine che le forme olomorfe non sono un modulo sull'anello delle funzioni complesse perchè, localmente, se moltiplico una forma olomorfa  $f dz$  per una funzione  $g$ , per ottenere una forma olomorfa bisogna che  $g$  sia pure olomorfa. Quindi le forme olomorfe sono un modulo sull'anello delle funzioni olomorfe. Se  $S$  è compatta, di funzioni olomorfe globali c'è solo le costanti. Ne segue che le forme olomorfe su  $S$  sono in realtà (solo) uno spazio vettoriale, che risulterà però — a differenza del caso reale — di dimensione finita (si veda il seguito).

**3.4. Zeri di forme, di forme olomorfe e meromorfe.** Sia  $\omega$  una 1-forma differenziabile reale su  $S$  e sia  $x$  uno zero isolato di  $\omega$ . Localmente  $\omega = adx + bdy$  ove  $(a, b)$  può essere interpretato come un campo di vettori  $v$  con uno zero isolato in  $x$ . L'indice dello zero di  $\omega$  è per definizione l'indice del campo  $v = (a, b)$  in  $x$ . Se si cambiano coordinate con  $(x, y) = F(s, t)$  si ha  $(dx, dy) = (\partial x/\partial s ds + \partial x/\partial t dt, \partial y/\partial s ds + \partial y/\partial t dt) = dF(ds, dt)$  e dunque  $\omega = (a, b) \cdot (dx, dy) = (a, b) \cdot dF(ds, dt)$  per cui il nuovo campo di vettori è  $w = dF^t(a, b)$ . Supponiamo per semplicità il campo  $v$  non degenerare, allora nello zero si ha  $dw = dF^t dF dv$  e quindi  $dw$  è invertibile e  $\det dw$  ha lo stesso segno di  $dv$ . Il seguente fatto è dunque immediato.

**Fatto.** Sia  $i_x$  l'indice dello zero di  $\omega$  in  $x$ . Allora

$$\sum i_x = \chi(S).$$

Mettiamo su  $S$  una struttura complessa e consideriamo una forma olomorfa  $\omega$ . Localmente  $\omega = f(z)dz$  ove possiamo supporre che 0 è uno di  $\omega$ . Si noti che siccome  $f$  è olomorfa lo zero è isolato a meno che  $f$  non sia nulla ovunque. Se sviluppiamo  $f$  in zero si ottiene,

$$\omega(z) = z^n g(z)dz \quad \text{con } g(0) \neq 0.$$

il numero  $n$  è detto ordine o molteplicità di  $\omega$ . Se  $z$  è uno zero di  $\omega$  lo indichiamo con  $m_z(\omega)$ . La forma reale  $\alpha = \omega + \bar{\omega}$  ha gli stessi zeri

di  $\omega$  e gli indici sono legati alle molteplicità da

$$i_z(\alpha) = -m_z(\omega)$$

**Esempio.** Per convincersi di questo fatto si fa l'esempio di  $\omega = z dz$ . In coordinate  $\omega = (x+iy)(dx+idy)$  per cui  $\alpha = 2(xdx - ydy) = d(x^2 - y^2)$  che è il differenziale di una sella ed ha indice  $-1$ . Se  $\omega = z^n dz$  allora la si perturba in modo da avere  $n$  zeri di ordine 1 e si usa che la somma degli indici non cambia. Se  $\omega = zg(z)dz$  con  $g(0) \neq 0$  allora il campo ottenuto è localmente omotopo a quello dato da  $zg(0)dz$  e siccome  $g(0)$  è un numero complesso, la moltiplicazione per  $g(0)$  preserva l'orientazione. Ossia, se in coordinate reali  $x+iy = (x, y)$ ,  $g(0)$  agisce per moltiplicazione di  $A$  con  $\det A > 0$ . Per cui il novo campo di vettori usato per calcolare l'indice è  $(\Re(g(0)(x+iy)), -\Im(g(0)(x+iy))) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (x, -y)$  e il determinate di  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  è positivo.

**Corollario.**  $\sum m_z(\omega) = -\chi(S) = 2g - 2$ .

Osserviamo che la molteplicità  $m_z$  è sempre per definizione un numero positivo (per cui l'indice è sempre negativo).

**Corollario.** In genere zero non ci sono forme olomorfe non banali. In genere uno una forma olomorfa non banale non ha zeri.

Per le forme meromorfe, la molteplicità di  $\omega$  rimane ben definita ed è positiva negli zeri e negativa nei poli. Per legare sta roba agli indici si fa così. Si fissa una forma d'area su  $S$ . Sia  $h$  la funzione  $1/x$  tagliata a 1 vicino a zero. Poi si considera  $\beta = h(|\alpha|^2)\alpha$  estendendo  $\beta$  a zero nei poli. Per costruzione  $\beta$  ha zeri dove  $\omega$  ha zeri e poli. Vicino agli zeri non si è toccato nulla (la  $h$  vale 1) e quindi l'indice di  $\beta + \bar{\beta}$  negli zeri di  $\omega$  è l'opposto della molteplicità. Nei poli invece, se  $\omega(z) = f(z)dz$

$$\beta(z) = \frac{1}{\|f\|^2}(f dz) = \frac{1}{\bar{f}} dz$$

e si controlla che l'indice di  $\beta + \bar{\beta}$  è uguale all'ordine del polo.

**Esempio.** Se  $f(z) = 1/z$  allora  $\beta = \bar{z} dz = (x-iy)(dx+idy)$  e  $\beta + \bar{\beta} = 2(xdx + ydy) = d(x^2 + y^2)$  che ha indice 1.

Rimane quindi valida, anche per forme meromorfe, la formula

$$\sum m_z(\omega) = -\chi(S) = 2g - 2.$$

**Teorema (Formula di Riemann-Hurwitz).** Sia  $f : S \rightarrow R$  un rive-

stimento ramificato di grado  $d$  tra due superfici compatte orientabili allora

$$\chi(S) = d\chi(R) - \sum ram(x)$$

ove  $ram(x)$  è l'indice di ramificazione in  $x \in S$  meno uno (se  $x$  un punto è di ramificazione con grado di ramificazione 3 allora  $ram(x) = 2$ ).

*Dimostrazione via triangolazioni.* Si triangola  $R$  in modo che le immagini dei punti di ramificazione siano vertici (se ne trova sempre una così). Si solleva la triangolazione a  $S$ . Si fa il conto  $V - L + F$  e si scopre che ogni simpleso di  $R$  è stato replicato  $d$  volte in  $S$ , tranne i vertici di ramificazione, che sono stati replicati  $d - ram(x)$ .  $\square$

*Dimostrazione con le forme meromorfe.* Si mette una struttura di superficie di Riemann su  $R$  e si solleva tale struttura a  $S$  così che  $f$  diventa olomorfa. Si prende una 1-forma meromorfa  $\alpha$  su  $R$  (se se ne trova una in giro) e si fa il pull-back su  $S$ . I poli e gli zeri si replicano  $d$  volte con le loro molteplicità fuori dal luogo di ramificazione. In un punto di ramificazione, localmente la  $f$  è  $z \mapsto z^k$ . Se  $\omega$  era  $h(z)dz$  il suo pull back diventa  $h(z^k)d(z^k) = kz^{k-1}h(z^k)dz$ . Quindi se c'era uno zero/polo di ordine  $n$  (ove  $n > 0$  significa zero,  $n < 0$  polo e  $n = 0$  punto liscio) questo diventa uno zero/polo di ordine  $kn + k - 1$ . Si fa la somma notando che  $k - 1$  è  $ram(z)$ .  $\square$

**3.5. Esempi: curve in  $\mathbb{CP}^2$ .** Una curva è una varietà di dimensione 1, se siamo nel mondo complesso, una curva ha dimensione 1 su  $\mathbb{C}$ , ergo è una superficie. Consideriamo  $\mathbb{CP}^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$  con coordinate omogenee  $[X_0, X_1, X_2]$ . Se ci mettiamo nella carta locale  $\{X_2 \neq 0\}$  ci ritroviamo in  $\mathbb{C}^2$  con coordinate  $(z, w)$  corrispondenti a  $[z, w, 1] \in \mathbb{CP}^2$ . Un polinomio omogeneo  $P$  di grado  $d$  nelle variabili  $Z_i$  corrisponde a un polinomio  $p$  di grado  $d$  (in genere non omogeneo) su  $\mathbb{C}^2$ .

Sia no  $P, p$  tali polinomi e sia  $S$  la curva determinata dall'equazione  $P = 0$ . La prima domanda che ci si pone è “Che roba è  $S$ ?”

Innanzitutto  $S$  è liscia se il differenziale di  $P$  non si annulla mai sui punti di  $S$ . Ci restringeremo a questo caso. Siccome abbiamo usato la scrittura  $\partial/\partial z$  per indicare operatori differenziali reali, indichiamo con  $P_x$  la derivata parziale — nel senso complesso — di  $P$  nella variabile  $x$ . Quindi su  $S$  non possono annullarsi contemporaneamente  $p_z$  e  $p_w$  mentre siccome  $P = 0$  su  $S$  il differenziale di  $P$  si annulla “lungo”  $S$  ( $S$  è una curva di livello di  $P$ ). Su  $S$  quindi in carte locali

$$p_z dz + p_w dw = 0 \quad |p_z| + |p_w| \neq 0$$

Si noti che le coordinate  $z, w$  non sono altro che funzioni  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  (per esempio  $z : (z, w) \mapsto z$ ) e quindi inducono funzioni su  $S$  per restrizione, i cui differenziali sono forme olomorfe  $dz$  e  $dw$ .

**Corollario.**  $S$  ha obbligatoriamente punti all'infinito perché se  $S$  è compatta nella carta locale  $\mathbb{C}^2 = \{X_2 \neq 0\}$  allora le funzioni  $z, w$  sono olomorfe su tutta  $S$  e per compattezza avrebbero massimo e minimo, cosa proibita alle funzioni olomorfe.

La forma  $dz$  si annulla ove la proiezione sulla prima componente  $z : S \rightarrow \mathbb{C}$  ha un punto critico, ove cioè  $S$  ha una tangenza “verticale”, ossia ove  $p_w = 0$ . Quindi la forma  $dz/p_w$  ha buone chances di essere ben definita e olomorfa. E similmente per  $dw$ . In effetti, dall'equazione sul differenziale di  $P$  si ottiene la condizione  $\frac{dz}{p_w} = -\frac{dw}{p_z}$  sui punti di  $S$ , quindi possiamo definire la forma su  $S$

$$\omega = \frac{dz}{p_w} = -\frac{dw}{p_z}$$

che si vede essere olomorfa e senza zeri su  $S$  usando la prima scrittura nei punti ove  $p_w \neq 0$  e la seconda ove  $p_z \neq 0$ .

**3.6. La formula grado-genere**  $g = (d-1)(d-2)/2$ . Sia  $p$  un polinomio di grado  $d$  in  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  e sia  $S$  la curva definita da  $p = 0$ . Supponiamo  $S$  liscia. In carte locali  $\{X_2 \neq 0\}$  definiamo la forma olomorfa mai nulla  $\omega = \frac{dz}{p_w} = -\frac{dw}{p_z}$ .

Gli ordini degli zeri/poli di  $\omega$  all'infinito ci diranno, attraverso la formula dell'indice, qual'è la caratteristica di  $S$  (e dunque il genere).

Se in carte locali

$$p = \sum_{k=0}^d \sum_{n+m=k} a_{nm} z^n w^m$$

il suo omogeneizzato è

$$P = \sum_{k=0}^d \left( \sum_{n+m=k} a_{nm} X_0^n X_1^m \right) X_2^{d-k}$$

per cui l'intersezione di  $P = 0$  con la retta all'infinito  $X_2 = 0$  si riduce all'equazione

$$\sum_{n+m=d} a_{nm} X_0^n X_1^m = 0$$

che in carte locali  $X_0 \neq 0$  diventa

$$Q(X_1) = \sum_{n=0}^d a_{(d-n)n} X_1^n = 0$$

che ha quindi (al più)  $d$  radici. In effetti si vede che  $P$  ha esattamente  $d$  radici (contate con molteplicità) all'infinito. A meno di cambi di coordinate ci possiamo ridurre al caso in cui le radici siano tutte distinte e nella stessa carta  $\{X_0 \neq 0\}$ . In particolare il  $Q$  ha grado  $d$ .

Sia  $x = [X_0, X_1, 0]$  un punto all'infinito di  $S$ . A meno di cambi di coordinate lineari possiamo supporre che  $x = [1, 0, 0]$ . Essendo radice semplice,  $P_{X_1}[1, 0, 0] \neq 0$ . Considerando coordinate locali

$$(1, u, v) = \left(1, \frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}\right) \in \{X_0 \neq 0\}$$

si ha, su  $\{X_0, X_2 \neq 0\}$ ,

$$[1, u, v] = [X_0, X_1, X_2] = [z, w, 1]$$

quindi

$$(z, w) = \left(\frac{X_0}{X_2}, \frac{X_1}{X_2}\right) = \left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)$$

da cui  $dz = -(1/v^2)dv$ . Ora,  $P = P(X_0, X_1, X_2)$  è omogeneo di grado  $d$  e siccome  $Q(X_1)$  ha grado  $d$ ,  $P_{X_1}$  ha grado  $d-1$ , da cui

$$p_u = \frac{P_{X_1}}{X_0^{d-1}} \quad p_w = \frac{P_{X_1}}{X_2^{d-1}} = p_u \left(\frac{X_0}{X_2}\right)^{d-1} = \frac{p_u}{v^{d-1}}.$$

Quindi  $p_u(0, 0) \neq 0$  perché  $P_{X_1}[1, 0, 0] \neq 0$  e

$$\omega = dz/p_w = -(1/v^2)v^{d-1}dv/p_u$$

Ha uno zero/polo di molteplicità  $d-3$  (zero se  $d \geq 3$ , polo se  $d < 3$ ) e questo vale per ogni punto all'infinito di  $S$  (che sono  $d$ ). La formula di Riemann-Hurwitz ci dice allora che

$$\chi(S) = -d(d-3)$$

da cui

$$g(S) = \frac{-\chi(S) + 2}{2} = \frac{d(d-3) + 2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

#### 4. LA PRIME-DEGREE CONJECTURE

Sia  $\pi : X \rightarrow Y$  una funzione olomorfa di grado topologico  $d$  tra due superfici di Riemann compatte senza bordo. Abbiamo visto come la formula di Riemann-Hurwitz lega le molteplicità locali dei punti di ramificazione e le caratteristiche di  $X$  e  $Y$ .

Infatti una applicazione olomorfa è sempre un rivestimento ramificato, i punti di ramificazione sono dove il differenziale si annulla, e quello

che avevamo chiamato  $ram(x)$  non è altro che l'ordine con cui si annulla  $d\pi$  meno uno. La formula quindi si applica e nel contesto delle mappe olomorfe si legge

$$\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_p m_p - 1$$

ove  $p$  varia nell'insieme dei punti di ramificazione di  $X$ . Per ogni punto  $y \in Y$  la fibra  $\pi^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  è costituita da  $k$  punti distinti.  $y$  si dice valore di ramificazione se almeno uno degli  $x_i$  è un punto di ramificazione. Se  $y$  non è un valore di ramificazione allora  $k = d$  e  $m_{x_i} = 1$  per ogni  $x_i$ . Altrimenti, si avrà qualche  $m_{x_i} > 1$ , ma in ogni caso

$$\sum_{i=1}^k m_{x_i} = d.$$

Alla mappa  $\pi$  si associa il dato di ramificazione, che consiste nella lista dei valori  $y_1, \dots, y_n$  di ramificazione e, per ogni  $i$  la partizione dell'intero  $d$  nei valori  $m_x$

$$d = \sum_{x \in \pi^{-1}(y_i)} m_x^i$$

La formula di Riemann-Hurwitz è dunque condizione necessaria affinché un rivestimento con un certo dato di ramificazione esista.

**Definizione.** Diremo che un *rivestimento candidato* è il dato di due numeri del  $\chi_X$  e  $\chi_Y$  della forma  $2g - 2$ , di un grado intero  $d > 0$  e di  $n$  partizioni di  $d$ , ossia stringhe di numeri

$$\{(m_1^1, \dots, m_{k_1}^1), (m_1^2, \dots, m_{k_2}^2), (m_1^n, \dots, m_{k_n}^n)\}$$

tali che per ogni  $i$  si ha  $d = \sum_{j=1}^{k_i} m_j^i$  e che valga la condizione di Riemann-Hurwitz

$$\chi_X = d\chi_Y - \sum_{i,j} m_j^i - 1$$

**Domanda:** Dato un rivestimento candidato esistono  $X, Y$  e  $\pi : X \rightarrow Y$  tali che  $\chi(X) = \chi_X, \chi(Y) = \chi_Y, \deg(\pi) = d$  e tali che le partizioni di  $d$  corrispondano alle partizioni dei valori di ramificazione di  $\pi$ ?

**Teorema.** Se  $\chi_Y \leq 0$  allora la risposta è SÌ: la Riemann-Hurwitz è condizione necessaria e sufficiente.

**Teorema.** Se  $\chi_Y = 2$  allora SE la risposta è sì per  $n = 3$  allora è sì in generale.

**Teorema.** Per  $\chi_Y = 2, d = 4$  e  $n = 3$  il dato  $(2, 2), (2, 2), (3, 1)$  non è realizzabile.



*Dimostrazione.* Le monodromie sono incompatibili tra loro

**CONGETTURA** (Prime-degree conjecture) Se  $n = p$  è un numero primo la risposta è SI.

In pratica si devono studiare i casi in cui  $Y = \mathbb{CP}^1$  e  $n = 3$  con  $\{y_i\} = \{0, 1, \infty\}$  e  $d$  primo.

BIBLIOGRAFIA:

Qui <http://arxiv.org/abs/1010.2888> ci si trova una buona introduzione al problema.

Questi son due articoli di riferimento:

D.H. Husemoller *Ramified coverings of Riemann surfaces.*

Duke Math. J. 29 (1962) 167—174

Link su mathscinet: [http://www.ams.org/mathscinet/pdf/136726.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&mx-pid=136726&pg4=AUCN&pg5=TI&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&r=1&review\\_format=html&s4=Husemoller&s5=coverings&s6=&s7=&s8=All&vfpref=html&yearRangeFirst=&yearRangeSecond=&yrop=eq](http://www.ams.org/mathscinet/pdf/136726.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&mx-pid=136726&pg4=AUCN&pg5=TI&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&r=1&review_format=html&s4=Husemoller&s5=coverings&s6=&s7=&s8=All&vfpref=html&yearRangeFirst=&yearRangeSecond=&yrop=eq)

A. Edmonds, R. Kulkarni and R. Stong *Realizability of branched coverings of surfaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), no. 2, 773—790.

Link su mathscinet: [http://www.ams.org/mathscinet/pdf/732119.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&mx-pid=732119&pg4=AUCN&pg5=AUCN&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&r=1&review\\_format=html&s4=edmonds&s5=kulkarni&s6=&s7=&s8=All&vfpref=html&yearRangeFirst=&yearRangeSecond=&yrop=eq](http://www.ams.org/mathscinet/pdf/732119.pdf?arg3=&co4=AND&co5=AND&co6=AND&co7=AND&dr=all&mx-pid=732119&pg4=AUCN&pg5=AUCN&pg6=PC&pg7=ALLF&pg8=ET&r=1&review_format=html&s4=edmonds&s5=kulkarni&s6=&s7=&s8=All&vfpref=html&yearRangeFirst=&yearRangeSecond=&yrop=eq)

## 5. SPAZI DI FUNZIONI (E FORME) MEROMORFE

Materiale tratto dal Donaldson, capitoli 8 e 9. La(e) domanda(e) che ci porremo per un po' è(sono) “Esistono funzioni meromorfe su  $S$ ? Se sì, come son fatte? Possiamo mettere i poli dove ci pare?”

Sia  $S$  una superficie di Riemann e sia  $p \in S$ . Sia  $\omega$  una 1-forma meromorfa avente un solo polo semplice in  $p$ . In coordinate locali in cui  $p = 0$ ,  $\omega = f dz$  e a meno di multipli si ha  $f = z^{-1} + a_0 + a_1 z + \dots$ . Sia  $U$  una palletta intorno a zero e  $\varphi : U \rightarrow [0, 1]$  una funzione liscia a supporto in  $U$  che vale 1 in un intorno di zero. Quindi  $g = f - \varphi/z$  è ben definita e liscia anche in zero. Quindi, ponendo  $u_p = \varphi/z$ , che è

definita globalmente (è nulla fuori da  $U$ ), si ha

$$f = g + u_p$$

D'altronde, per ogni punto  $p$  si può definire  $u_p$ . Se ne deduce che esiste una funzione meromorfa con un polo semplice in  $p$  se e solo se esiste una funzione liscia  $g$  (ma non olomorfa) su  $S$  tale che  $g + u_p$  sia olomorfa fuori da  $p$ . Generalizzando, esiste una funzione meromorfa con poli semplici in  $p_1, \dots, p_n$  se esiste una funzione liscia  $g$  su  $S$  tale che  $g + \lambda_1 u_{p_1} + \dots + \lambda_n u_{p_n}$  sia olomorfa nel complementare di  $\{p_1, \dots, p_n\}$ . Essere olomorfa vuol dire avere  $\bar{\partial}$  nullo. Posto  $u = -(\lambda_1 u_{p_1} + \dots + \lambda_n u_{p_n})$ , ci si riduce a studiare il problema dell'esistenza di una funzione liscia che soddisfi

$$\bar{\partial}g = \bar{\partial}u$$

ove  $\bar{\partial}u$  è un termine noto.

**Definizione.** Si introducono gli spazi vettoriali complessi

$$H^0(S) = \{\text{funzioni olomorfe su } S\} = \ker \bar{\partial} \quad (= \mathbb{C} \text{ se } S \text{ è compatta})$$

$$H^{1,0}(S) = \{1\text{-forme olomorfe su } S\} = \ker \bar{\partial} : \Omega^{1,0}(S) \rightarrow \Omega^2(S)$$

$$H^{0,1}(S) = \Omega^{0,1}(S) / \text{Imm}(\bar{\partial} : \Omega^0 \rightarrow \Omega^{0,1}) (= \{f d\bar{z}\} / \{\bar{\partial}\varphi\})$$

$$H^{1,1}(S) = \Omega^2(S) / \text{Imm}(\bar{\partial} : \Omega^{1,0} \rightarrow \Omega^{1,1})$$

Il termine noto  $U = \bar{\partial}u$  sta in  $\Omega^{0,1}$  e dire che l'equazione  $\bar{\partial}g = U$  ha soluzione equivale a dire che  $[U] = 0 \in H^{0,1}$ . La classe  $[U]$  dipende dal punto  $p$  e dalla scelta di  $\varphi/z$  come funzione test. Se prendiamo un'altra funzione test  $\xi$  che sia liscia fuori da  $p$  e meromorfa in un intorno di  $p$  con polo singolo in  $p$  allora esiste  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $h = \varphi/z - \lambda\xi$  è liscia su  $S$  e quindi  $\bar{\partial}u_p - \lambda\bar{\partial}\xi = \bar{\partial}h$  da cui

$$[U] = [\bar{\partial}u_p] = \lambda[\bar{\partial}\xi] \in H^{0,1}$$

per cui la classe proiettiva di  $[U]$  dipende solo da  $p$ .

In generale se abbiamo  $p_1, \dots, p_n$  ricaviamo  $U_1, \dots, U_n$  ed avremo che esiste una funzione meromorfa su  $S$  con poli semplici nei  $p_i$  se e solo se  $[U_1], \dots, [U_n]$  sono linearmente dipendenti in  $H^{0,1}$ .

**Corollario.** Se la dimensione di  $H^{0,1}$  è minore di  $n$  allora esiste sempre una funzione meromorfa con poli semplici solo nei punti  $p_1, \dots, p_n$ .

**Fatto.** Se  $f$  è una funzione liscia su  $S$  allora  $\bar{\partial}\partial f = -\partial\bar{\partial}f = \frac{i}{2}\Delta f dx dy$ .

*Dimostrazione.*  $\bar{\partial}\partial f = \bar{\partial}(\partial_x f - i\partial_y f)(dx + idy)/2 = [(\partial_x \partial_x f + i\partial_y \partial_x f) - i(\partial_x \partial_y f + i\partial_y \partial_y f)](dx - idy)(dx + idy)/4 = (\partial_x \partial_x f + \partial_y \partial_y f)(dx - idy)(dx + idy)/4 = \frac{i}{2}\Delta f dx dy$

Per cui il problema induce a risolvere un'equazione di Poisson

$$\Delta g = \Delta u$$

ove  $\Delta u$  è il termine noto<sup>2</sup>.

Si noti che siccome non abbiamo una metrica, i nostri laplaciani sono 2-forme. Ossia per noi  $\Delta := i[\partial, \bar{\partial}]$  cioè  $\Delta f := i(\partial\bar{\partial}f - \bar{\partial}\partial f)$ .

**Teorema** (che il Donaldson chiama “Main Theorem”). Sia  $b \in \Omega^2(S)$ . Il problema di Poisson  $\Delta g = b$  ha soluzione se e solo se  $\int_S b = 0$ . La soluzione è unica a meno di costanti additive.

**5.1. Conseguenze.** Sia  $S$  una superficie di Riemann chiusa di genere  $g$ . Si introducono la mappa di coniugio

$$\sigma : H^{1,0} \rightarrow H^{0,1} \quad \sigma(\omega) = \bar{\omega};$$

la mappa che associa ad una forma armonica (che è chiusa) la sua classe di coomologia

$$i : H^{1,0} \rightarrow H^1(S) \quad i(\omega) = [\omega] \in H^1(S);$$

il prodotto di dualità

$$\langle , \rangle : H^{1,0} \times H^{0,1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \langle \alpha, [\beta] \rangle = \int_S \alpha \wedge \beta$$

che è ben definito perché se  $\beta' = \beta + \bar{\partial}\varphi$  allora  $\alpha \wedge \beta' = \alpha \wedge (\beta + \bar{\partial}\varphi)$  e  $\alpha \wedge \bar{\partial}\varphi = -d(\varphi\alpha)$  e quindi  $\int_S \alpha \wedge \bar{\partial}\varphi = \int_{\partial S} \varphi\alpha = 0$ ; e la mappa di inclusione

$$\nu : H^{1,1} \rightarrow H^2(S)$$

data dal fatto che tutte le 2-forme su una superficie son chiuse e  $(Imm(\bar{\partial}) : \Omega^{1,0} \rightarrow \Omega^{1,1}) \subseteq (Imm(d) : \Omega^1 \rightarrow \Omega^2)$  (perché  $\bar{\partial} = d$  su  $\Omega^{1,0}$ )

**Fatto** (corollario del teorema e del fatto di cui sopra).

- (1)  $\sigma$  è un isomorfismo
- (2)  $i$  è un immersione
- (3)  $H^{0,1} = (H^{1,0})^*$
- (4)  $H^{0,1} \oplus H^{1,0} = H^1(S)$
- (5)  $\dim(H^{1,0}) = \dim(H^{0,1}) = g$
- (6)  $\nu$  è un isomorfismo

<sup>2</sup>Si noti che  $\Delta g = \Delta u$  non implica che  $\bar{\partial}g = \bar{\partial}u$  ma solo che  $\bar{\partial}g = \bar{\partial}u + \alpha$  con  $\partial\alpha = 0$  ossia  $\alpha \in H^{1,0}$

*Dimostrazione.* (1) Iniettività: Sia  $\omega$  tale che  $\sigma(\omega) = 0$ . Per definizione esiste  $\varphi \in \Omega^0$  tale che  $\bar{\partial}\varphi = \bar{\omega}$  da cui  $\partial\bar{\partial}\varphi = \partial\bar{\omega} = \bar{\partial}\omega = 0$  perché  $\omega$  è olomorfa. Quindi  $\Delta\varphi = 0$  ma siccome  $S$  è compatta per il principio del massimo  $\varphi$  è costante, ergo  $\omega = \bar{\partial}\varphi = 0$ . (Per ora non si è usato il teorema.) Surgettività: data  $[\alpha] \in H^{0,1}$  si cerca  $\omega$  1-forma olomorfa e  $\varphi \in \Omega^0$  tale che  $\bar{\omega} - \alpha = \bar{\partial}\varphi$ . Applicando  $\partial$  si ottiene  $\partial\bar{\omega} - \partial\alpha = \partial\bar{\partial}\varphi = -i\Delta\varphi/2$  siccome  $\omega$  è olomorfa  $\partial\bar{\omega} = 0$ , dunque dobbiamo risolvere

$$\Delta\varphi = -2i\partial\alpha$$

visto che  $\alpha \in \Omega^{0,1}$  si ha  $\partial\alpha = d\alpha$  ergo  $\int_S \partial\alpha = \int_Z d\alpha = \int_{\partial S} \alpha = 0$  ed il teorema garantisce l'esistenza della richiesta  $\varphi$ .

(2) Sia  $\omega$  olomorfa tale che  $\omega = d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha$ . Essendo  $\omega$  di tipo  $(1,0)$  si ha  $\bar{\partial}\alpha = 0$  e quindi  $\alpha$  è olomorfa. Siccome  $S$  è compatta  $\alpha$  è costante, da cui  $\omega = 0$ . (Qui non si è usato né il teorema né il fatto.)

(3) Usando il prodotto di dualità insieme a  $\sigma$  si ottiene

$$\langle \alpha, \sigma(\beta) \rangle = \int_S \alpha \wedge \bar{\beta}$$

che è un prodotto hermitiano definito positivo. Ne segue che l'applicazione

$$\beta \mapsto L_\beta = \int_S \cdot \wedge \bar{\beta}, \quad \text{ossia } L_\beta(\alpha) = \int_A \alpha \wedge \bar{\beta}$$

è un isomorfismo tra  $H^{1,0}$  e il suo duale. Essendo  $\sigma$  un isomorfismo la tesi segue considerando  $\theta \mapsto L_{\sigma^{-1}([\theta])}$  che associa a  $[\theta] \in H^{0,1}$  un elemento di  $(H^{1,0})^*$ .

(4) Siccome  $i$  è un immersione allora  $H^{1,0}$  ha dimensione finita. Consideriamo la mappa

$$\mathfrak{I} : H^{1,0} \oplus H^{0,1} \rightarrow H^1(S) \quad (\alpha, [\theta]) \mapsto i(\alpha) + \overline{i(\sigma^{-1}([\theta]))}$$

Siccome  $i$  è iniettiva e  $\sigma$  è un isomorfismo, allora anche  $[\theta] \mapsto \overline{i(\sigma^{-1}([\theta]))}$  è iniettiva. Ne segue che anche  $\mathfrak{I}$  è iniettiva. Per la surgettività, sia  $\omega$  una 1-forma chiusa su  $S$ . Si cercano 1-forme  $\alpha$  olomorfa e  $\theta$  antiolomorfa ed  $f \in \Omega^0$  tali che

$$\omega - \alpha - \theta = df = \partial f + \bar{\partial} f$$

Siccome  $\Omega^1 = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$  si ha  $\omega = \omega_{1,0} + \omega_{0,1}$ . Per cui si deve cercare  $f$  tale che  $\omega_{1,0} - \partial f$  sia olomorfa e  $\omega_{0,1} - \bar{\partial} f$  antiolomorfa. Quindi si deve risolvere

$$\bar{\partial}\omega_{1,0} = \frac{i}{2}\Delta f \quad \partial\omega_{0,1} = -\frac{i}{2}\Delta f$$

siccome  $\omega$  è chiusa  $0 = d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega = \bar{\partial}\omega_{1,0} + \partial\omega_{0,1}$  e le due equazioni appena scritte sono compatibili. Siccome per le  $(1,0)$ -forme  $\bar{\partial} = d$ , si deve risolvere

$$-2id\omega_{1,0} = \Delta f$$

che ha soluzione per Stokes ed il *main theorem*.

(5) Per il punto (3)  $H^{1,0}$  e  $H^{0,1}$  hanno la stessa dimensione. La tesi segue da punto (4) e dal fatto che  $\dim(H^1(S)) = 2g$ .

(6) La surgettività è immediata per definizione. Sia  $[\omega] \in H^{1,1}$  tale che  $\omega = d\alpha$  con  $\alpha \in \Omega^1$ . Per Stokes  $\int_S \omega = 0$  e per il *main theorem* esiste  $f$  tale che  $\bar{\partial}\partial f = \omega$ . Ponendo  $\beta = \partial f$  si ha quindi  $\omega = \bar{\partial}\beta$  e dunque  $[\omega] = 0 \in H^{1,1}$ .  $\square$

**Corollario.** Una superficie di Riemann  $S$  che è omeomorfa a  $S^2$  è biolomorfa a  $\mathbb{CP}^1$ .

*Dimostrazione.*  $\dim(H^{0,1}) = 0$  quindi per ogni punto  $p$  di  $S$  esiste una funzione meromorfa su  $S$  con un solo polo di ordine 1 in  $p$  e nient'altro (vedi discussione a inizio sezione). Una tale funzione non è altro che una funzione olomorfa da  $S$  a  $\mathbb{CP}^1$  di grado 1, cioè iniettiva. Quindi è un biolomorfismo.  $\square$

**Corollario.** Una superficie di Riemann  $S$  che è omeomorfa a un toro è biolomorfa a  $\mathbb{C}/\Lambda$  ove  $\Lambda$  è un sotto gruppo discreto di  $\mathbb{C}$  isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$ .

*Dimostrazione.* Siccome  $\dim(H^{1,0}) = 1$  esiste una forma olomorfa  $\omega$  non nulla su  $S$ . Per la formula delle molteplicità,  $\omega$  non può avere zeri. Integrando  $\omega$  su cammini a partire da un punto base si ottiene una funzione olomorfa iniettiva a valori in  $\mathbb{C}$  modulo il gruppo generato dai periodi.  $\square$

**Corollario.** Sia  $S$  una superficie di Riemann di genere  $g$  e siano  $\{p_i\}$  almeno  $g + 1$  punti distinti su  $S$ . Allora esiste una funzione meromorfa su  $S$  i cui poli stanno su qualcuno dei  $p_i$ .

*Dimostrazione.* Viene direttamente dalla discussione a inizio sezione e dal fatto che  $\dim(H^{0,1}) = g$ .  $\square$

## 6. PERIODI E JACOBIANA

Testo di riferimento per questa sezione: J. Jost *Compact Riemann Surfaces, third edition* Springer Universitext. (In biblioteca c'è.)

Sia  $S$  una superficie di genere  $g > 0$ . Fissiamo una volta per tutte un modello topologico di  $S$  come segue.

Sia  $P$  un  $4g$ -agone, ossia un poligono regolare con  $4g$  lati. Etichettiamo i lati del bordo di  $P$  in senso orario con i simboli

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots \quad i = 1, \dots, g$$

(oppure  $i \in \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ .) Avendo  $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$  la scrittura di un commutatore, possiamo scrivere  $\partial P = \prod_i [a_i, b_i]$ . Sarà importante per i segni dei conti che faremo che  $b_i$  venga subito dopo  $a_i$ , così come  $a_i^{-1}$  venga dopo  $b_i$ .

Adesso per ogni  $i$  incolliamo tra loro i lati  $a_i$  con  $\bar{a}_i^{-1}$  badando a farlo con le orientazioni inverse, quindi  $a_i$  si incolla con  $-a_i^{-1}$ . Stessa cosa per i  $b_i$ .

Il risultato di  $P$  modulo la relazione d'equivalenza degli incollamenti è omeomorfo a  $S$ . D'ora in avanti lavoreremo su  $P$  considerando  $S = P/\sim$ .

I lati di  $P$  danno luogo a cammini chiusi in  $S$ , le cui classi di omologia in  $H_1(S)$  denotiamo ancora con  $a_i$  e  $b_i$ . Tali classi costituiscono una base di  $H_1(S)$ , sia considerando lo spazio vettoriale  $H_1(S, \mathbb{C})$  che lo  $\mathbb{Z}$ -modulo (gruppo abeliano)  $H_1(S, \mathbb{Z})$ .

Si ha  $H^1 \simeq (H_1)^*$  e la dualità è data dall'integrazione  $\langle \omega, \gamma \rangle = \int_\gamma \omega$ . Si noti che per stokes, se  $[\omega] = [\eta] \in H^1$  e se  $[\gamma] = [\delta] \in H_1$ , allora  $\int_\gamma \omega = \int_\delta \eta$ .

Sia  $z_0 \in S$  un punto base e  $\omega$  una 1-forma olomorfa. Localmente  $f(z) = \int_{z_0}^z \omega$  è ben definito e  $df = \omega$ . Globalmente, se  $\gamma$  e  $\eta$  sono due cammini tra  $z_0$  e  $z$  la differenza tra  $\int_\gamma \omega$  e  $\int_\eta \omega$  è l'integrale di  $\omega$  sul cammino chiuso  $\gamma * \eta^{-1}$ . Un integrale di  $\omega$  su un cammino chiuso si chiama *periodo* di  $\omega$ . L'insieme dei periodi è un gruppo abeliano generato dai periodi di  $\omega$  sugli  $a_i$  ed i  $b_i$ . Ne segue che  $f$  è ben definita come funzione a valori in  $\mathbb{C}$  modulo il gruppo dei periodi. Se  $g > 1$  di solito il gruppo dei periodi non è discreto come sottogruppo di  $\mathbb{C}$  ed il quoziente risulta quindi un troiaio<sup>3</sup>.

Si ovvia a questo inconveniente integrando contemporaneamente una base di  $H^{1,0}$ . Sia  $\omega_1, \dots, \omega_g$  una base dello spazio delle forme olomorfe su  $S$ . Definiamo la funzione

$$F(z) = \left( \int_{z_0}^z \omega_1, \dots, \int_{z_0}^z \omega_g \right) \quad F : S \rightarrow \mathbb{C}^g / \Lambda$$

<sup>3</sup>Nonostante ciò, l'integrazione di  $\omega$  da luogo ad una struttura di traslazione su  $S$ . Le strutture di traslazione sono molto studiate.

ove  $\Lambda$  è il gruppo dei periodi, cioè il sottogruppo additivo di  $\mathbb{C}^g$  generato dai vettori:

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \int_{a_g} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_g} \omega_g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \int_{b_1} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_1} \omega_g \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_g} \omega_g \end{pmatrix}$$

sia  $M$  la seguente matrice  $g \times 2g$  a coefficienti in  $\mathbb{C}$

$$M = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_1 & \dots & \int_{a_g} \omega_1 & \int_{b_1} \omega_1 & \dots & \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g & \dots & \int_{a_g} \omega_g & \int_{b_1} \omega_g & \dots & \int_{b_g} \omega_g \end{pmatrix}$$

**Teorema.** Le colonne di  $M$  sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Siccome  $H^1 = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$  e l'isomorfismo  $\sigma : H^{1,0} \rightarrow H^{0,1}$  è il coniugio, una base per  $H^1$  è data da  $\omega_1, \dots, \omega_g, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_g$ . La matrice dell'accoppiamento di dualità tra  $H^1$  e  $H_1$  come spazi vettoriali reali, è data quindi dalla matrice  $N = \begin{pmatrix} M \\ \bar{M} \end{pmatrix}$  (che è una matrice  $2g \times 2g$ ).

Se le colonne di  $M$  fossero linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$  allora lo sarebbero anche quelle di  $N$ , che però ha determinante non nullo perché l'accoppiamento di dualità è una forma bilineare non degenera.  $\square$

**Corollario.**  $\mathbb{C}^g / \Lambda \simeq \mathbb{R}^{2g} / \mathbb{Z}^{2g}$ .

*Dimostrazione.* Siccome le colonne di  $M$  sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ , le si possono usare come base su  $\mathbb{R}$  di  $\mathbb{C}^g \mathbb{R}^{2g}$ . Nelle coordinate date dalla nuova base,  $\Lambda$  diventa il gruppo additivo generato dalla base canonica, che è  $\mathbb{Z}^{2g}$ .  $\square$

**Teorema.** Le prime  $g$  colonne di  $M$  sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{C}$ .

Per dimostrare questo teorema useremo le cosiddette *Relazioni di Riemann*. Sia  $\omega$  una 1-forma olomorfa su  $S$ . Ci mettiamo nel modello del  $4g$ -agone  $P$  con la relazione degli incollamenti del bordo. Sia  $z_0$  un punto interno di  $P$ . Definiamo

$$f(z) = \int_{z_0}^z \omega$$

la  $f$  è ben definita sui punti interni di  $P$  e soddisfa  $df = \omega$  per il teorema fondamentale del calcolo integrale. Sul bordo compariranno le ambiguità dei periodi. Sia  $z$  un punto del lato  $a_i$  e sia  $z' \in a_i^{-1}$  un punto incollato a  $z$ . Ossia  $z$  e  $z'$  sono diversi in  $P$  ma diventano lo

stesso punto in  $S$ . Sia  $x$  il punto iniziale di  $b_i$  (che coincide col punto finale di  $a_i$ ) e sia  $x'$  il punto finale di  $b_i$ . Si ha

$$f(z') = \int_{z_0}^{z'} \omega = \int_{z_0}^z \omega + \int_{z'}^x \omega + \int_x^{x'} \omega + \int_{x'}^{z'} \omega = f(x) + \int_{b_i} \omega$$

perché  $\int_z^x \omega = -\int_{x'}^z \omega$  (l'identificazione incolla il lato  $a_i$  con il lato  $a_i^{-1}$ , ma con l'orientazione opposta!)

Un calcolo analogo, tenendo conto di come sono ordinati gli  $a_i$  e i  $b_i$  sul bordo di  $P$ , mostra che se  $w \in b_i$  e  $w' \in b_i^{-1}$  sono incollati dalle identificazioni allora

$$f(w') = f(w) - \int_{a_i} \omega$$

Poniamo

$$\alpha_i = \int_{a_i} \omega \quad \beta_i = \int_{b_i} \omega$$

Sia ora  $\eta$  una 1-forma su  $S$ . Ci restringeremo ai casi in cui  $\eta$  sia antiolomorfa oppure meromorfa. Andiamo a calcolare

$$\int_{\partial P} f(z)\eta.$$

Su  $a_i$  abbiamo  $\eta(z) = \eta(z')$  perché  $\eta$  è una forma definita su  $S$ . Mentre per  $f$  abbiamo le relazioni appena dimostrate. Da cui

$$\int_{a_i} f\eta + \int_{a_i^{-1}} f\eta = \int_{a_i} f\eta - \int_{a_i} (f + \beta_i)\eta = -\beta_i \int_{a_i} \eta$$

e similmente otteniamo

$$\int_{b_i} f\eta + \int_{b_i^{-1}} f\eta = \alpha_i \int_{b_i} \eta.$$

Se poniamo  $\int_{\alpha_i} \eta = \gamma_i$  e  $\int_{\beta_i} \eta = \delta_i$  abbiamo le relazioni di Riemann

$$\int_{\partial P} f\eta = \sum_i \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$$

che si legge anche

$$\int_{\partial P} f\eta = \sum_i \int_{a_i} \omega \int_{b_i} \eta - \int_{b_i} \omega \int_{a_i} \eta$$

*Dimostrazione del teorema.* Specializziamo le relazioni al caso  $\eta = \bar{\omega}$ .

$$d(f\bar{\omega}) = df \wedge \bar{\omega} + f d\bar{\omega}$$



siccome  $\omega$  è olomorfa,  $d\bar{\omega} = 0$ . D'altronde avevamo  $df = \omega$ . Se localmente  $\omega = \varphi(z)dz$  si ha

$$d(f\bar{\omega}) = \omega \wedge \bar{\omega} = |\varphi|^2 dz \wedge d\bar{z} = -2i|\varphi|^2 dx \wedge dy.$$

Da cui

$$\frac{1}{-2i} \int_{\partial P} f\bar{\omega} = \frac{i}{2} \int_P d(f\bar{\omega}) = \int_P |\varphi|^2 dx dy > 0$$

e quindi per ogni forma olomorfa  $\omega$  non identicamente nulla si ha

$$0 \neq \sum_i \alpha_i \bar{\beta}_i - \bar{\alpha}_i \beta_i = \sum_i 2i\Im(\alpha_i \bar{\beta}_i)$$

ergo non può succedere che gli  $\alpha_i$  siano tutti nulli a meno che  $\omega$  non sia la forma nulla. Ma è chiaro che, se chiamiamo  $A$  la matrice  $g \times g$  a coefficienti complessi ottenuta trasponendo le prime  $g$  colonne di  $M$  e se  $\omega = \sum x_i \omega_i$  allora si ha

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_g \end{pmatrix}$$

Siccome le  $\omega_i$  sono una base di  $H^{1,0}$  e le relazioni valgono per ogni forma olomorfa, abbiamo ottenuto che il sistema  $AX = 0$  ha come unica soluzione  $X = 0$ , ossia  $A$  è invertibile e le sue righe sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Corollario.** Due forme olomorfe sono uguali se e solo se hanno gli stessi periodi sugli  $a_i$ .

**Corollario.** L'integrazione sugli  $a_i$  fornisce delle coordinate per  $H^{1,0}$ .

**Corollario.** Esiste una base  $\omega_1, \dots, \omega_g$  di  $H^{1,0}$  tale che  $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$ . Tale base si chiama *base normalizzata*. Rispetto alla base normalizzata la matrice  $M$  assume la forma  $M = (I, Z)$ .

Adesso specializziamo le relazioni di Riemann al caso di  $\eta$  meromorfa senza poli su  $\partial P$  e  $z_0$ , ma soprattutto senza residui. Verrà fuori un formulazzo che ci servirà nella prossima sezione.

Dire che  $\eta$  non ha residui vuol dire che nello sviluppo in serie vicino a un polo manca il termine  $1/z$ . In oltre l'assenza di residui garantisce che l'integrale  $\int_{z_0}^z$  dentro  $P$  è ben definito. Le relazioni di Riemann ci dicono

$$\sum Res(f\eta) = \int_{\partial P} f\eta = \sum_i \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i.$$

Adesso fissiamo una volta per tutte, e ciò sarà valido anche per la prossima sezione, delle palette intorno ai poli di  $\eta$  disgiunte tra loro e delle coordinate locali intorno in tali palette in modo che il polo in questione sia lo zero.

Vicino al polo  $p$ , la  $\omega$  avrà espansione locale  $(\sum_{k \geq 0} c_k^p z^k) dz$ , ove l'apice  $p$  è per ricordarsi che stiamo sviluppando vicino a  $p$ , per cui la  $f$  sarà

$$f(z) = \int_{z_0}^p \omega + \sum_{k \geq 1} c_{k-1}^p \frac{1}{k} z^k$$

(il fatto che  $\int_{z_0}^p \omega$  si porta dietro l'indeterminazione dei periodi sparirà perché  $\eta$  non ha termini di ordine  $1/z$ .) Chiamiamo  $e_i^p$  i coefficienti dello sviluppo di  $\eta$  vicino al punto  $p$ , per cui se il polo  $p$  è di ordine  $m_p$ ,

$$\eta = \left( \sum_{k \geq m_p, k \neq 1} e_k^p z^k \right) dz.$$

I residui di  $f\eta$  sono i coefficienti del termine  $1/z$  nel prodotto. Localmente, il termine  $1/z$  nel prodotto è dato dalla somma dei prodotti di termini di tipo  $1/z^{h+1}$  con termini di ordine  $z^h$ . Quindi

$$Res_p(f\eta) = \sum_{k=2}^{|m_p|} e_k^p c_{k-2}^p \frac{1}{k-1}$$

e dunque la formulazza

$$\sum_{i=1}^g \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = \sum_p Res_p(f\eta) = \sum_{p \text{ polo di } \eta} \left( \sum_{k=2}^{|m_p|} e_k^p c_{k-2}^p \frac{1}{k-1} \right).$$

## 7. IL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH

Questo è uno dei teoremi toghi della matematica. Per enunciarlo servono un po' di preliminari. Il testo di riferimento è il Jost.

Sia  $S$  una superficie di Riemann chiusa di genere  $g$ .

**7.1. Divisori.** Per i divisori ci sono due notazioni, quella additiva (forse più standard) e quella moltiplicativa (che useremo nel seguito).

**Definizione moltiplicativa.** Il gruppo dei divisori di  $S$  è l'insieme dei prodotti formali

$$\prod p^{m_p}$$

con  $p \in S$  e  $m_p \in \mathbb{Z}$  con la convenzione che  $p^0 = 1$  e che  $m_p \neq 0$  solo per un numero finito di punti. L'operazione di gruppo è quella indotta dalla notazione moltiplicativa  $(\prod p^{m_p})(\prod p^{n_p}) = \prod p^{m_p+n_p}$ . L'elemento neutro si indica con 1.

**Definizione additiva.** Il gruppo dei divisori di  $S$  è l'insieme delle somme formali

$$\sum m_p p$$

con  $p \in S$  e  $m_p \in \mathbb{Z}$  con la convenzione che  $0p = 0$  e che  $m_p \neq 0$  solo per un numero finito di punti. L'operazione di gruppo è quella indotta dalla notazione additiva  $\sum m_p p + \sum n_p p = \sum (m_p + n_p)p$ . L'elemento neutro si indica con  $0$ .

I due gruppi sono ovviamente isomorfi tramite il logaritmo formale. Si indicano con  $\text{Div}(S)$ .

**Esempio-definizione.** Data una funzione meromorfa  $f$  su  $S$ , il suo divisore  $\text{div}(f)$  è  $\sum m_p p$  ove  $m_p$  indica la molteplicità di  $p$  come zero/polo di  $f$  e  $m_p = 0$  se  $f$  non ha né zeri né poli in  $p$ . In altre parole se lo sviluppo locale di  $f$  vicino a  $p$  è del tipo  $\sum_{k \geq m_p} \alpha_k z^k$ .

**Notazione:** Chiameremo ordine di un polo/zero il numero positivo  $|m_p|$  e molteplicità il numero  $m_p$ .

Detto  $M(S)$  l'insieme delle funzioni meromorfe su  $S$  si ha la mappa

$$\text{div} : M(S) \rightarrow \text{Div}(S) \quad f \mapsto \text{div}(f)$$

che è chiaramente un omomorfismo di gruppi.

**Definizione.** Un divisore che sia il divisore di una funzione meromorfa si chiama *divisore principale*.

**Esempio-definizione.** Data una 1-forma meromorfa  $\omega$  su  $S$ , il suo divisore  $\text{div}(\omega)$  è  $\sum m_p p$  ove  $m_p$  indica la molteplicità di  $p$  come zero/polo di  $\omega$  e  $m_p = 0$  se  $f$  non ha né zeri né poli in  $p$ . La mappa  $\text{div}$  è un omomorfismo di gruppi.

**Definizione.** Un divisore che sia il divisore di una 1-forma meromorfa si chiama *divisore kanonico*<sup>4</sup>.

**Definizione.** Il grado di un divisore è definito da

$$\text{deg}(\sum m_p p) = \sum m_p.$$

**Fatto.** Un divisore principale ha grado zero.

*Dimostrazione.* Una funzione meromorfa è una funzione da  $S$  a  $\mathbb{C}P^1$ . Siccome le mappe meromorfe preservano l'orientazione, il grado topologico di  $f$  è un numero positivo ed è il numero di preimmagini di un valore qualsiasi, contate con molteplicità. Quindi  $0$  e  $\infty$  hanno lo

<sup>4</sup>io scrivo con la kappa perché si indica sempre con  $K$

stesso numero di preimmagini. Tale numero è dato da  $\sum_{m_p > 0} m_p = -\sum_{m_p < 0} m_p$ . La tesi segue.  $\square$

**Fatto.** Un divisore kanonico ha grado  $-\chi(S)$ .

*Dimostrazione.* Questa non è altro che la formula dell'indice.

**Definizione** *Classi di equivalenza.* Sull'insieme  $\text{Div}(S)$  si pone la relazione di equivalenza modulo principali

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad AB^{-1} = \text{div}(f)$$

con  $f$  funzione meromorfa su  $S$ .

**Fatto.**  $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$ .

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalle definizioni.  $\square$

**Fatto.** Il grado non dipende dalla classe di equivalenza.

*Dimostrazione.* Se  $A = B \text{div}(f)$  allora  $\deg(A) = \deg(B \text{div}(f)) = \deg(B) + \deg(\text{div}(f)) = \deg(B)$   $\square$

**Fatto.** Se  $A \sim B$  e  $B$  è kanonico allora anche  $A$  lo è. Viceversa, se sia  $A$  che  $B$  sono kanonici allora  $A \sim B$ .

*Dimostrazione.* Se  $A = B \text{div}(f)$  e  $B = \text{div}(\omega)$  allora  $A = \text{div}(f\omega)$ . Se  $A = \text{div}(\omega)$  e  $B = \text{div}(\theta)$  allora  $\omega/\theta$  è una ben definita funzione meromorfa  $f$  su  $S^5$ . Da cui  $\omega = f\theta$  e dunque  $A = \text{div}(\theta) \text{div}(f) = B \text{div}(f)$ .  $\square$

Spesso non faremo distinzione un divisore con la sua classe di equivalenza. Il divisore kanonico si chiama così perché come abbiamo appena visto ce n'è uno solo. Il divisore canonico si indica di solito con la lettera  $K$ .

**Definizione** *relazione d'ordine parziale.* Dati  $A = \prod p^{a_p}$  e  $B = \prod p^{b_p}$ , si dirà che  $A \geq B$  se  $a_p \geq b_p$  per ogni  $p$ . Diremo  $A > B$  se  $A \geq B$  e  $A \neq B$ .

**Esempio.** Si ha  $\text{div}(f) \geq \text{div}(g)$  se per ogni punto  $p$ ,  $f$  ha un polo di ordine al massimo uguale a quello di  $g$  oppure uno zero di ordine almeno uguale a quello di  $g$ .

**Definizione.** Per ogni divisore  $A$  si definiscono

$$L(A) = \{f \in M(S) \text{ t.c. } \text{div}(f) \geq A\}$$

$$\Omega(A) = \{\omega \text{ 1-forma meromorfa t.c. } \text{div}(\omega) \geq A\}$$

---

<sup>5</sup>Usando il formalismo "fisico" se  $\omega = h dz$  e  $\theta = g dz$  allora i  $dz$  si semplificano nel rapporto

**Fatto.** Sono entrambi sottospazi vettoriali.

*Dimostrazione.* Localmente se  $f = \sum_{h \geq n} a_h z^h$  e  $g = \sum_{h \geq m} b_h z^h$  allora  $\lambda f + \mu g = \sum_{h \geq r} c_h z^h$  con  $r \geq \min(m, n)$ .  $\square$

**Fatto.** Le dimensioni di entrambi dipendono solo dalla classe di equivalenza di  $A$ .

*Dimostrazione.* Se  $A = B \operatorname{div}(f)$  allora la moltiplicazione per  $f$  fornisce isomorfismi tra  $L(A)$  e  $L(B)$  e tra  $\Omega(A)$  e  $\Omega(B)$ .  $\square$

**Fatto.**  $\dim(\Omega(A)) = \dim(L(A/K))$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\omega$  una forma meromorfa non identicamente nulla. Tale forma esiste perché per il main theorem esistono forme oloedriche e funzioni meromorfe. La divisione per  $\omega$  fornisce un isomorfismo tra  $\Omega(A)$  e  $L(A/\operatorname{div}(\omega))$ . Infatti, se  $\eta$  è una 1-forma meromorfa con  $\operatorname{div}(\eta) \geq A$  allora  $\eta/\omega$  è una ben definita funzione meromorfa e  $\operatorname{div}(\eta/\omega) = \operatorname{div}(\eta) - \operatorname{div}(\omega) \geq A - \operatorname{div}(\omega)$ . In oltre se uso  $\omega'$  ho che  $\operatorname{div}(\omega') - \operatorname{div}(\omega) = \operatorname{div}(\omega'/\omega) = \operatorname{div} \varphi$  per cui  $A - \operatorname{div}(\omega) \sim A - \operatorname{div}(\omega')$ . Dunque ha senso parlare di  $\dim(L(A/K))$ .

**Esempio.** Se si definiscono gli  $\Omega^q$  usando i  $q$ -differenziali, con lo stesso trucco si scala di ordine scaricando tutto su potenze di  $K$ . Per esempio se si considera lo spazio dei differenziali quadratici si ha  $\dim(\Omega^2(A)) = \dim(\Omega(A/K)) = \dim(L(A/K^2))$ .

**Teorema (Riemann-Roch).**

$$\dim(L(A^{-1})) - \dim(\Omega(A)) = \deg(A) - g + 1$$

o, in notazione additiva:

$$\dim(L(-A)) - \dim(\Omega(A)) = \deg(A) - g + 1$$

o anche

$$\dim(L(-A)) - \dim(L(A - K)) = \deg(A) - g + 1$$

o anche

$$\dim(\Omega(K/A)) - \dim(\Omega(A)) = \deg(A) - g + 1$$

o anche

$$\dim(L(A^{-1})) - \dim(\Omega^2(KA)) = \deg(A) - g + 1$$

In letteratura si trovano anche le seguenti notazioni: il divisore si indica con  $D$  e si pone  $l(D) = h^0(D) = \dim(L(-D))$  per cui la formula si legge

$$\begin{aligned} h^0(D) - h^0(K - D) &= \deg(D) - g + 1 \\ l(D) - l(K - D) &= \deg(D) - g + 1. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Il primo passo è il caso  $A > 1$  e divisori equivalenti, da cui seguirà il caso generale. Ricordiamo che le dimensioni degli spazi in gioco dipendono solo dalla classe di equivalenza del divisore  $A$ . Sia quindi  $A > 1$ . Quindi  $A = \Pi p^{m_p}$  con  $m_p > 0$  ove  $p$  varia in un insieme  $p_1, \dots, p_s$ . Per non appesantire le notazioni ometteremo quando possibile il pedice  $i$  e scriveremo  $p$  anziché  $p_i$ .

$$\deg(A) = \sum_p m_p.$$

Una funzione  $f \in L(1/A)$  è una funzione meromorfa con poli nei punti  $p$  di ordine al più  $m_p$ . Il suo differenziale  $df$  ha le seguenti proprietà

- (1)  $df$  non ha residui;
- (2) l'integrale di  $df$  lungo ogni cammino chiuso è nullo;
- (3)  $df$  è una 1-forma meromorfa con poli nei punti  $p$  di ordine al più  $m_p + 1$ .

Siano quindi  $B = \Pi p^{-m_p-1}$ ,  $a_i$  e  $b_i$  le curve derivanti dalla descrizione di  $S$  come  $4g$ -agone coi lati incollati e  $V$  lo spazio vettoriale

$$V = \{\omega \in \Omega(B) \text{ senza residui e tale che } \int_{a_i} \omega = 0 \forall i = 1, \dots, g\}$$

Il differenziale è un'applicazione lineare da  $L(1/A)$  in  $V$  per cui

$$\dim(L(1/A)) = \dim(\text{Imm}(d)) + \dim(\ker(d))$$

ovviamente  $\ker(d)$  è lo spazio delle funzioni costanti e quindi ha dimensione 1. Quindi

$$\dim(L(1/A)) = 1 + \dim(\text{Imm}(d))$$

e dobbiamo solo calcolare la dimensione dell'immagine di  $d$ .

**Lemma.**  $\text{Imm}(d)$  è lo spazio  $\{\omega \in V : \int_{b_i} \omega = 0 \forall i = 1, \dots, g\}$ .

*Dimostrazione.* Ovviamente  $\text{Imm}(d)$  è contenuto in tale spazio per la proprietà (2) di cui sopra. Viceversa, se  $\omega$  sta in tale spazio, allora l'integrale di  $\omega$  lungo un qualsiasi cammino chiuso è nullo (localmente perché non ha residui, globalmente perché  $\int_{a_i} \omega = \int_{b_i} \omega = 0$  per ogni  $i$ ). Quindi rimane ben definita  $f = \int_{z_0}^z \omega$  ed è chiaro che  $f \in L(1/A)$  e che  $df = \omega \in \text{Imm}(d)$ .  $\square$

Quindi  $\text{Imm}(d)$  è ottenuto da  $V$  imponendo  $g$  equazioni lineari. C'è dunque da calcolare la dimensione di  $V$  e quante di queste  $g$  equazioni sono linearmente indipendenti.

**Lemma.** Sia  $\psi$  una funzione che sia localmente meromorfa vicino ai  $p_i$  e  $C^\infty$  (nel senso reale) sul resto di  $S$ . Allora esiste una 1-forma di tipo  $(1, 0)$   $\eta$  liscia su tutta  $S$  e tale che

$$\bar{\partial}\eta = \bar{\partial}\partial\psi.$$

*Dimostrazione.* Siano  $B_i$  piallette disgiunte tra loro, intorno ai  $p_i$ , tali che  $\psi$  sia meromorfa su ogni  $B_i$  con unico polo in  $p_i$ . Allora, essendo  $\bar{\partial}\psi = 0$  su  $B_i$  e dunque  $d\partial\psi = 0$  su  $B_i$  si ha, usando stokes,

$$\int_S d\partial\psi = \sum_i \int_{B_i} d\partial\psi + \int_{S \setminus \cup_i B_i} d\partial\psi = \int_{\partial(S \setminus \cup_i B_i)} d\partial\psi = \sum_i \int_{\partial B_i} \partial\psi$$

siccome  $\psi$  è meromorfa su  $B_i$  si ha  $\partial\psi = d\psi$ , un'altra istanza di stokes ci dice

$$\int_S d\partial\psi = \sum_i \int_{\partial B_i} \partial\psi = \sum_i \int_{\partial\partial B_i} \psi = 0$$

Quindi per il main theorem esiste una funzione  $h$  liscia su  $S$  tale che

$$\bar{\partial}\partial h = \bar{\partial}\partial\psi$$

e ponendo  $\eta = \partial h$  si ha la tesi.  $\square$

**Corollario.** Per ogni  $n \geq 2$  e per ogni  $p_i$  esiste una 1-forma meromorfa  $\theta_{i,n}$  su  $S$  con un solo polo nel punto  $p_i$  di ordine esattamente  $n$ . In oltre, tali forme possono essere scelte in modo che  $\int_{a_j} \theta_{i,n} = 0$  per ogni  $j, i, n$ .

*Dimostrazione.* Basta usare come  $\psi$  la funzione  $-\varphi/z^{n-1}$  con  $\varphi$  funzione di taglio opportuna che vale 1 vicino a  $p_i$ . Se  $\eta$  è la  $(1, 0)$ -forma data dal lemma allora la forma  $\theta_{i,n} = \eta - \partial\psi$  soddisfa l'equazione  $\bar{\partial} = 0$  e quindi è meromorfa su  $S$ . L'unico polo è di ordine  $n$  per costruzione. Si noti che per usare il lemma serve  $n \geq 2$  perché  $1/z$  non è il differenziale di nessuna funzione meromorfa. A questo punto dobbiamo ammazzare i periodi. Prendiamo una forma  $\theta = \theta_{i,n}$  e sia  $\alpha_j = \int_{a_j} \theta$ . Per le relazioni di Riemann esiste unica una forma olomorfa  $\tau$  tale che  $\int_{a_j} \tau = \alpha_j$  per  $j = 1, \dots, g$ . La forma  $\theta - \tau$  è meromorfa, ha i periodi lungo gli  $a_j$  nulli e gli stessi poli di  $\theta$ , con gli stessi ordini.  $\square$

**Corollario.**  $\dim(V) = \deg(A)$ .

*Dimostrazione.* Chiaramente le forme  $\theta_{i,n}$  con  $n = 2, \dots, m_{p_i} + 1$  stanno in  $V$  e sono linearmente indipendenti tra loro (hanno poli di ordini diversi in ognuno dei vari  $p_i$ ). D'altronde, se  $\omega \in V$  allora ha poli di ordine al più  $m_{p_i} + 1$  in  $p_i$  per cui sommando una combinazione lineare delle  $\theta_{i,n}$  si può cancellare il polo. Esistono quindi numeri complessi  $\lambda_{i,n}$  tali che  $\omega - \sum \lambda_{i,n} \theta_{i,n}$  sia una 1-forma olomorfa. Per costruzione, l'integrale di tale forma lungo ogni  $a_i$  è nullo e quindi  $\omega - \sum_i \lambda_{i,n} \theta_{i,n} = 0$

e dunque le  $\theta_{i,n}$  oltre ad essere linearmente indipendenti generano e quindi formano una base di  $V$ . Ne segue che

$$\dim(V) = \sum_i m_{p_i} = \deg(A)$$

□

**Lemma.**  $\dim(\text{Imm}(d)) = \deg(A) - g + \dim(\Omega(A))$

*Dimostrazione.* Le  $g$  condizioni lineari che determinano  $\text{Imm}(d)$  sono

$$\int_{b_i} \omega = 0 \quad i = 1, \dots, g.$$

Sia  $\omega \in V$  e  $\omega_1, \dots, \omega_g$  una base di  $H^{1,0}$  normalizzata rispetto agli  $a_i$  (ossia  $\int_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$ ). Sia  $f_j = \int_{z_0}^z \omega_j$  la funzione definita per dimostrare le relazioni di Riemann. Queste, insieme al fatto che  $\int_{a_i} \omega = 0$  per ogni  $a_i$ , traducono le condizioni di integrazione sui  $b_i$  nelle seguenti

$$\sum \text{Res}(f_j \omega) = 0 \quad j = 1, \dots, g.$$

Siccome  $\omega = \sum \lambda_{i,n} \theta_{i,n}$  si ottiene

$$\sum \text{Res}(f_j \omega) = \sum_{i,n} \sum_p \lambda_{i,n} \text{Res}_p(f_j \theta_{i,n}) \quad j = 1, \dots, g$$

Sviluppiamo le  $\omega_j$  localmente vicino ai poli

$$\omega_j = \left( \sum_{k \geq 0} c_k^{p,j} z^k \right) dz$$

e usiamo la formulazza tenendo conto che localmente vicino a  $p_i$  si ha

$$\theta_{i,n} = (n-1) \frac{1}{z^n} \text{ piú un termine olomorfo.}$$

Per cui le condizioni lineari diventano

$$\sum_{i=1}^s \sum_{n=2}^{m_{p_i}+1} \lambda_{i,n} c_{n-2}^{p_i,j} = 0 \quad j = 1, \dots, g$$

In termini matriciali ciò si esprime come

$$HX = 0$$



ove

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_{1,2} \\ \vdots \\ \lambda_{1,m_1+1} \\ \lambda_{2,2} \\ \vdots \\ \lambda_{2,m_2+1} \\ \vdots \\ \lambda_{s,2} \\ \vdots \\ \lambda_{s,m_s+1} \end{pmatrix}$$

e  $H$  è la matrice  $\deg(A) \times g$  formata dai coefficienti  $c_{n-2}^{p_i,j}$ .

$$H = \begin{pmatrix} c_0^{p_1,1} & \cdots & c_{m_1-1}^{p_1,1} & c_0^{p_2,1} & \cdots & c_{m_2-1}^{p_2,1} & \cdots & c_0^{p_s,1} & \cdots & c_{m_s-1}^{p_s,1} \\ c_0^{p_1,2} & \cdots & c_{m_1-1}^{p_1,2} & c_0^{p_2,2} & \cdots & c_{m_2-1}^{p_2,2} & \cdots & c_0^{p_s,2} & \cdots & c_{m_s-1}^{p_s,2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_0^{p_1,g} & \cdots & c_{m_1-1}^{p_1,g} & c_0^{p_2,g} & \cdots & c_{m_2-1}^{p_2,g} & \cdots & c_0^{p_s,g} & \cdots & c_{m_s-1}^{p_s,g} \end{pmatrix}$$

Per cui

$$\dim(\text{Imm}(d)) = \dim(\ker H) = \deg(A) - \text{rango}(H).$$

Sia  $T$  la trasposta di  $H$ , chiaramente  $\text{rango}(T) = \text{rango}(H)$  e si ha

$$g = \text{rango}(T) + \dim(\ker T).$$

Adesso basta osservare che  $\ker(T)$  non è altro che lo spazio  $\Omega(A)$ .

Da cui

$$\text{rango}(H) = g - \dim(\Omega(A))$$

e

$$\dim(L(1/A)) = 1 + \dim(\text{Imm}(d)) = 1 + \deg(A) - g + \dim(\Omega(A))$$

e il primo passo è fatto. Gli altri casi seguono facilmente. Vediamoli.

**Caso: Divisore equivalente al divisore 1.** Siccome le dimensioni in gioco dipendono solo dalla classe di equivalenza di  $A$ , basta considerare il caso  $A = 1$ . Se  $A = 1$  allora  $L(1/A) = L(1)$  è fatto di funzioni olomorfe e quindi costanti, ergo  $\dim(L(1)) = 1$ . mentre  $\Omega(1)$  non è altro che  $H^{1,0}$  che ha dimensione  $g$ . Essendo  $\deg(A) = 0$  la formula segue.

**Caso:  $K/A$  equivalente ad un divisore  $B > 1$ .** Applicando Riemann-Roch a  $K/A$  si ottiene

$$\dim(L(A/K)) = \deg(K/A) - g + 1 + \dim(\Omega(K/A))$$

da cui

$$\dim(\Omega(A)) = \deg(K) - \deg(A) - g + 1 + \dim(L(1/A))$$

e la tesi segue da  $\deg(K) = 2g - 2$ .

**Caso finale: Quando né  $A$  né  $K/A$  sono equivalenti a un Divisore  $B > 1$ .**

**Lemma.**  $L(1/A) = 0$

*Dimostrazione.* Se ci fosse  $f \in L(1/A)$  allora  $\text{div}(f) > 1/A$ , ma allora  $A \text{div}(f) > 1$  per cui  $A$  è equivalente a  $B = A \text{div}(f)$  e  $B > 1$ .  $\square$

**Lemma.**  $\Omega(A) = 0$

*Dimostrazione.* Se ci fosse  $\omega \in \Omega(A)$  allora  $\text{div}(\omega) > A$  ergo  $B = \text{div}(\omega)/A > 1$  e per ogni  $\eta \in H^{1,0}$  si ha che  $\omega/\eta = f$  è una funzione olomorfa e

$$\text{div}(f)K/A = \frac{\text{div}(\omega) \text{div}(\eta)}{\text{div}(\eta) A} = B > 1$$

$\square$

**Corollario.** In questo caso Riemann-Roch si riduce a dimostrare che

$$\deg(A) = g - 1.$$

Sia  $A = A_+/A_-$  con  $A_+ > 1$  e  $A_- > 1$ . Per loro possiamo applicare Riemann-Roch del primo passo e otteniamo, tenendo conto che  $\deg(A) = \deg(A_+) - \deg(A_-)$ ,

$$\deg(A) = \dim(L(1/A_+)) - \deg(A_-) - \dim(\Omega(A_+)) + g - 1.$$

**Lemma.**  $\dim(L(1/A)) - \deg(A_-) \leq 0$ .

*Dimostrazione.*  $0 = L(1/A)$  è un sottospazio di  $L(1/A_+)$  ottenuto imponendo alle funzioni di avere zeri nei punti di  $A_-$ , con ordine almeno quanto  $A_-$ . Tali condizioni sono lineari. Anche se non sono indipendenti, si ha comunque che imponendo  $\deg(A_-)$  condizioni lineari a  $L(1/A_+)$  si ottiene lo spazio 0. Quindi la dimensione di  $L(1/A_+)$  non può eccedere  $\deg(A_-)$ .  $\square$

**Corollario.**  $\deg(A) \leq g - 1$ .

*Dimostrazione.* Immediata.  $\square$

**Corollario.**  $\deg(K/A) \leq g - 1$ .

*Dimostrazione.* Basta rifare il ragionamento sostituendo  $A$  con  $K/A$ .  $\square$

**Corollario.**  $\deg(A) \geq g - 1$ .

*Dimostrazione.* Avendo  $\deg(K/A) = \deg(K) - \deg(A) = 2g - 2 - \deg(A)$ , si ha  $g - 1 \geq \deg(K/A) = 2g - 2 - \deg(A)$  da cui  $\deg(A) \geq g - 1$ .  $\square$

Dunque

$$\deg(A) = g - 1$$

ed il teorema è concluso.