Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T.
Prova d'esame del 16/01/2014. Soluzioni.

1. Detta $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, Quale dei seguenti insiemi di vettori è una base di $\mathbb{R}^3$?
$\boxed{\text{a}}$ $\{0, e_1, e_2, e_3\}$; $\boxed{\text{b}}$ $\{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$; $\boxed{\text{c}}$ $\{e_1, e_2\}$; $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta giusta è la b. Infatti l'insieme a contiene lo zero e quindi non può essere un insieme di vettori linearmente indipententi. L'insieme c contiene due elementi e quindi non puó essere una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice delle coordinate dei vettori dell'insieme b è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ che ha determinante diverso da zero.

2. Le coordinate del vettore $(1, 2, 3)$ rispetto alla base $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ di $\mathbb{R}^3$ sono:
$\boxed{\text{a}}$ $(1, 2, 3)$; $\boxed{\text{b}}$ $(1, 4, 9)$; $\boxed{\text{c}}$ $(1, 1, 1)$; $\boxed{\text{d}}$ $(1, 0, 0)$.

Soluzione. La risposta giusta è la c perché $(1, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 2, 0) + 1 \cdot (0, 0, 3)$.

3. La dimensione di $V = \{L \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tale che $Im(L) \subset Span(1, 1, 1)\}$ è:
$\boxed{\text{a}}$ 6; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ 2; $\boxed{\text{d}}$ 4.

Soluzione. La risposta giusta è la c. Infatti $span(1, 1, 1)$ è uno spazio vettoriale di dimensione uno. La dimensione di $Hom(U, W)$ è $\dim(U) \dim(W)$. Lo spazio V non è altro che $Hom(\mathbb{R}^2, span(1, 1, 1))$ ed ha quindi dimensione $2 \cdot 1 = 2$.

4. Sia $f : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ la derivata. La forma di Jordan di f è:
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La risposta giusta è la a. Infatti la matrici b non è in forma di Jordan ma rappresenta la matrice della derivata in base canonica $1, x, x^2$. Ne segue che l'unico autovalore della derivata, nello spazio dei polinomi, è lo zero. Entrambe le matrici c e d hanno 1 come autovalore. Rimane solo la matrice a che è la forma di Jordan della derivata perchè la molteplicità geometrica dell'unico autovalore (lo zero) è 1. Quindi la forma di Jordan è costituita da un unico blocco.

5. La matrice della forma bilineare $b((x, y), (x', y')) = xx' - 2yx' + y'x$, nella base canonica di $\mathbb{R}^2$ è:
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La matrice di b è per definizione $\begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) \end{pmatrix}$ che corrisponde alla matrice a (i calcoli sono immediati ricordando che $e_1 = (1, 0)$ ed $e_2 = (0, 1)$).

6. Quale delle seguenti è un'affinità di $\mathbb{R}^2$ che manda $(0,0) \mapsto (-1,1)$, $(1,0) \mapsto (0,0)$ e $(1,1) \mapsto (0,1)$?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La risposta giusta è la d. Infatti una verifica diretta mostra che l'applicazione d è l'unica che manda $(0,0) \mapsto (-1,1)$, $(1,0) \mapsto (0,0)$ e $(1,1) \mapsto (0,1)$. Infine, l'applicazione d è un'affinità perché la sua parte lineare è invertibile.

7. Sia $w = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(v) = -v + \langle v, w \rangle w$. Ove $\langle v, w \rangle$ rappresenta il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Quale dei seguenti valori è autovalore di f?
$\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ 1; $\boxed{\text{c}}$ 2; $\boxed{\text{d}}$ 3.

Soluzione. La risposta giusta è la b. Infatti la matrice associata a f nella base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Che ha autovalori ± 1.

8. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le rette di $\mathbb{R}^2$ definite da $AX = 0$ e $A'X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono:
$\boxed{\text{a}}$ uguali; $\boxed{\text{b}}$ incidenti; $\boxed{\text{c}}$ sghembe; $\boxed{\text{d}}$ parallele.

Soluzione. La risposta giusta è la d. Infatti le matrici A ed A' determinano sistemi equivalenti, quindi $AX = 0$ coincide con $A'X = 0$. Quindi gli spazi affini $A'X = 0$ e $A'X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hanno la stessa giacitura, per cui sono o coincidenti o paralleli. Siccome $A'X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non contiene lo zero e $A'X = 0$ si, le due rette non sono coincidenti, ergo son parallele.

9. In $\mathbb{R}^3$ la distanza tra l'asse z ed il punto $p = (1,2,3)$ è:
$\boxed{\text{a}}$ $\sqrt{3}$; $\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{5}$; $\boxed{\text{c}}$ 3; $\boxed{\text{d}}$ 1.

Soluzione. La risposta giusta è la b. Infatti la distanza tra un punto e una retta è uguale alla distanza delle loro proiezioni su un piano perpendicolare alla retta data. In questo caso la distanza tra p e l'asse z è la distanza tra l'origine e la proiezione di p sul piano XY. Per il teorema di pitagora tale distanza è $\sqrt{5}$.

10. L'equazione del piano passante per i punti $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$ è:
$\boxed{\text{a}}$ x+y+z=0; $\boxed{\text{b}}$ x+y+z=1; $\boxed{\text{c}}$ x+y+z=2; $\boxed{\text{d}}$ x+y+z=3.

Soluzione. La risposta giusta è la c. Infatti è immediato verificare che $x + y + z$ vale 2 per ognuno dei tre punti dati.

11. Quale delle seguenti matrici è invertibile?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La risposta giusta è la c. Basta fare il determinante di ognuna delle matrici (magari sviluppandolo per la seconda colonna, che contiene uno zero) per verificare che la matrice c è l'unica con determinante diverso da zero.

12. Quale delle seguenti basi di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale rispetto al prodotto scalare standard?
$\boxed{\text{a}}$ $\{(1,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$; $\boxed{\text{b}}$ $\{(1,1,1),(1,-1,0),(0,-1,1)\}$; $\boxed{\text{c}}$ $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$;
$\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti.

Soluzione. La risposta giusta è la d. Infatti, nei casi a e c i primi due vettori non sono ortogonali tra loro, nel caso b gli ultimi due non sono ortogonali tra loro. Quindi nessuno degli insiemi a, b, c può essere una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

13. Quale operatore di $\mathbb{R}^3$ non è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard? $f(x,y,z) =$
$\boxed{\text{a}}$ (z,y,x); $\boxed{\text{b}}$ $(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$; $\boxed{\text{c}}$ (x,y,z); $\boxed{\text{d}}$ $(x+z, y+z, z)$.
Soluzione. La risposta giusta è la d. Infatti un operatore è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard se e solo se la matrice a lui associata rispetto alla base canonica è simmetrica. Le matrici degli operatori di cui sopra sono:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la $d)$ è l'unica non simmetrica.

14. In $\mathbb{R}^4$ sia V definito da $x+y+z+t = 1$ e $W = span(e_2, e_3, e_4)$ (e_1, e_2, e_3, e_4 è la base canonica).
$\boxed{\text{a}}$ $\dim(V \cap W) = 0$; $\boxed{\text{b}}$ $\dim(V \cap W) = 1$; $\boxed{\text{c}}$ $\dim(V \cap W) = 2$; $\boxed{\text{d}}$ $\dim(V \cap W) = 3$.

Soluzione. La risposta giusta è la c. Infatti l'equazione cartesiana di W è $x = 0$. Quindi $V \cap W$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x+y+z+t = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Che per il teorema di Rouché-Capelli descrive uno spazio affine di dimensione 2.

15. In $(\mathbb{Z}_2)^2$ sia $V = span((1,0),(1,1))$. Quanti elementi ha V?
$\boxed{\text{a}}$ 1; $\boxed{\text{b}}$ 2; $\boxed{\text{c}}$ 3; $\boxed{\text{d}}$ 4.

Soluzione. La risposta giusta è la d. Infatti $(1,0)$ e $(1,1)$ generano tutto $(\mathbb{Z}_2)^2$, che ha 4 elementi.