Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T.
Prova d'esame del 17/02/2014. Soluzioni. Versione 6. ♣ 7. ♡

1. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ è $\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ 4

Soluzione. La risposta è b, il che si può vedere riducendo la matrice per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La dimensione di $V = \{f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tali che $f(0,0,1) = f(0,1,0)\}$ è $\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ 4

Soluzione. La risposta è d. Una tale f ha matrice associata $\begin{pmatrix} a & c & c \\ b & d & d \end{pmatrix}$ con $f(1,0,0) = (a,b)$ e $f(0,0,1) = f(0,1,0) = (c,d)$, dunque dipende da 4 paramentri indipendenti.

3. In $\mathbb{C}^3$ quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x + iz = 0 \\ ix + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$? $\boxed{a}$ 0 $\boxed{b}$ 1 $\boxed{c}$ 2 $\boxed{d}$ infinite

Soluzione. La risposta è d. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ il cui determinante è nullo, dunque la matrice ha ker non banale, e dunque abbiamo infinite soluzioni.

4. In $\mathbb{R}^2$ la conica $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ è $\boxed{a}$ ellisse reale $\boxed{b}$ parabola $\boxed{c}$ iperbole $\boxed{d}$ $\varnothing$

Soluzione. La risposta è d. Completando i quadrati abbiamo che $x^2+y^2+x+y+1 = (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$, dunque a meno di un cambio di variabile affine la conica si scrive come $X^2 + Y^2 + 1 = 0$, che è la forma canonica dell'ellisse senza punti reali.

5. Gli autovalori di $f(x,y,z) = (x + 2z, y + z, -z)$ sono $\boxed{a}$ 1,2,3 $\boxed{b}$ 1,-1 $\boxed{c}$ 1,-1,3 $\boxed{d}$ $\pm\sqrt{3}$

Soluzione. La risposta è b. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; essendo triangolare, gli autovalori si leggono sulla diagonale.

6. La forma bilineare $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è definita positiva $\boxed{a}$ mai $\boxed{b}$ sempre $\boxed{c}$ solo se $x > 0$ $\boxed{d}$ solo se $x \neq 0$

Soluzione. La risposta è c. La forma è definita positiva se e solo se la matrice ha autovalori positivi; ma la matrice ha autovalori 1 e x.

7. In $\mathbb{R}^3$ le rette $r = \{(x, y, z) : x - y = y - z = 1\}$ e $s = span(1, 1, 1)$ sono tra loro
$\boxed{a}$ parallele $\boxed{b}$ sghembe $\boxed{c}$ incidenti $\boxed{d}$ uguali
Soluzione. La risposta è a. La giacitura di r ha equazioni cartesiane $\{x - y = y - z = 0\}$, una cui base è $(1, 1, 1)$, dunque le due rette hanno stessa giacitura. Tuttavia $(0, 0, 0)$ sta su s ma non su r quindi le rette non coincidono ma sono solo parallele.

8. In $\mathbb{R}^3$ la distanza tra $(1, 0, 3)$ e il piano passante per $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)$ è $\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ 4
Soluzione. La risposta è a. L'equazione cartesiana di un generico piano S di $\mathbb{R}^3$ è $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo che i tre punti dati stiano sul piano (cioè sostituendo le coordinate nell'equazione) otteniamo $a + d = 0, b + d = 0, 2c + d = 0$, da cui, ad esempio per $d = -2$ si ha $a = 2, b = 2, c = 1$, cioè l'equazione cartesiana $2x + 2y + z - 2 = 0$ per il piano. Dalla formula per la distanza punto-piano abbiamo
$$dist((1, 0, 3), S) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 1$$

9. Sia $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, f(x, y, z, t) = (y, -x, iz, z + it)$. La molteplicità geometrica di i è $\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ 4
Soluzione. La risposta è b. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$; la matrice di $f - iId$ è $\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha rango 2 (la seconda riga è $-i$ per la prima, e la terza è nulla).
Quindi la molteplicità geometrica di i, che è pari alla dimensione del ker di questa matrice, è 2.

10. In $\mathbb{R}^4$ la dimensione dello span di $X = \{xyzt = 0\}$ è $\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ 4
Soluzione. La risposta è d. L'equazione $xyzt = 0$, per legge di annullamento del prodotto, equivale a $x = 0$ or $y = 0$ or $z = 0$ or $t = 0$. In altri termini X è dato dall'unione dei quattro assi coordinati di $\mathbb{R}^4$, dunque il suo span coincide con tutto $\mathbb{R}^4$.

11. Per quali dei seguenti valori di x l'applicazione lineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ x & 2x \end{pmatrix}$ risulta autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$?
$\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 2 $\boxed{c}$ 3 $\boxed{d}$ 4
Soluzione. La risposta è d. Infatti in questo contesto l'applicazione risulta autoaggiunta se e solo se ha matrice simmetrica.

12. Se 1 è autovalore per un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ allora $f(x) - x$ è
$\boxed{a}$ iniettiva $\boxed{b}$ invertibile $\boxed{c}$ suriettiva $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è d. Infatti $f(x) - x = (f - 1Id)(x)$ ha ker non banale per definizione di autovalore. Dunque non può essere iniettiva né invertibile. Siccome un endomorfismo è iniettivo se e solo se suriettivo, non va bene neanche c.

13. Quale dei seguenti insiemi costituisce una base per $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?
$\boxed{\text{a}}$ $1, -1, x$ $\boxed{\text{b}}$ $1, x$ $\boxed{\text{c}}$ $x-1, x+1, (x-1)(x+1)$ $\boxed{\text{d}}$ $1, x, x^2, x^3$
Soluzione. La risposta è c. Infatti i vettori di a non sono linearmente indipendenti, i vettori di b sono pochi e quelli di d troppi (lo spazio ha dimensione 3).

14. Quale delle seguenti rappresenta un'isometria di $\mathbb{R}^2$ che manda $(1,0)$ in $(1,1)$ e $(0,0)$ in $(0,1)$?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è b. Le isometrie sono date da moltiplicazione per una matrice ortogonale più eventualmente un vettore di traslazione. In particolare la matrice deve avere determinante ± 1. Solo b soddisfa questa condizione; inoltre manda i punti dati nei punti richiesti: è la traslazione di vettore $(0,1)$.

15. In $\mathbb{R}^4$ le coordinate di $(1,2,3,4)$ rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono

$\boxed{\text{a}}$ $(1,2,3,4)$ $\boxed{\text{b}}$ $(1,1,1,1)$ $\boxed{\text{c}}$ $(4,3,2,1)$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è b. Infatti è quel che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.