Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T. Prova d'esame del 17/02/2014. Soluzioni. Versione 6.$\diamondsuit$ 7.$\spadesuit$

1. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è c, il che si può vedere riducendo la matrice per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La dimensione di $V = \{f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tali che $f(0,0,1) = f(0,1,0) = 0\}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è b. Una tale f ha matrice associata $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $f(1,0,0) = (a,b)$ e $f(0,0,1) = f(0,1,0) = (0,0)$, dunque dipende da 2 paramentri indipendenti.

3. In $\mathbb{C}^3$ quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x + iz = 0 \\ ix + y + z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$? $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 1 $\boxed{\text{c}}$ 2 $\boxed{\text{d}}$ infinite

Soluzione. La risposta è a. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ i & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ il cui determinante è nullo, dunque la matrice non ha rango massimo. Comunque ha rango 2 perché il primo determinante di ordine 2 non è nullo. Tuttavia aggiungendo il vettore del termine noto $(0,0,1)$ come quarta colonna otteniamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ i & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 3 (orlare il minore di ordine 2 appena citato con ultima riga e ultima colonna). Per Rouché -Capelli il sistema non ha soluzioni.

4. In $\mathbb{R}^2$ la conica $x^2 + y^2 + x + y = 1$ è $\boxed{\text{a}}$ ellisse $\boxed{\text{b}}$ parabola $\boxed{\text{c}}$ iperbole $\boxed{\text{d}}$ $\varnothing$

Soluzione. La risposta è a. Completando i quadrati abbiamo che $x^2+y^2+x+y-1 = (x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$, dunque a meno di un cambio di variabile affine la conica si scrive come $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, che è la forma canonica dell'ellisse reale.

5. Gli autovalori di $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2y+3z, 3z)$ sono $\boxed{\text{a}}$ 1,2,3 $\boxed{\text{b}}$ (1,1,1) $\boxed{\text{c}}$ 1,-1,3 $\boxed{\text{d}}$ $\pm\sqrt{3}$

Soluzione. La risposta è a. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; essendo triangolare, gli autovalori si leggono sulla diagonale.

6. Per quali x la forma bilineare $\begin{pmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è definita positiva? $\boxed{\text{a}}$ per nessun x $\boxed{\text{b}}$ per ogni x $\boxed{\text{c}}$ solo se $x>0$ $\boxed{\text{d}}$ solo se $x \neq 0$
Soluzione. La risposta è b. La forma è definita positiva se e solo se la matrice ha autovalori positivi; ma la matrice ha autovalori 1 e x^2+1 che è sempre positivo.

7. In $\mathbb{R}^3$ le rette $r = \{(x,y,z) : x-y = y-z = 0\}$ e $s = span(1,1,1)$ sono tra loro
$\boxed{\text{a}}$ parallele $\boxed{\text{b}}$ sghembe $\boxed{\text{c}}$ incidenti $\boxed{\text{d}}$ uguali
Soluzione. La risposta è d. Sono entrambe rette per l'origine e entrambe contengono $(1,1,1)$, dunque devono coincidere (per due punti passa una e una sola retta).

8. In $\mathbb{R}^3$ la distanza tra $(2,2,0)$ e il piano passante per $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,2)$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è b. L'equazione cartesiana di un generico piano S di $\mathbb{R}^3$ è $ax+by+cz+d=0$. Imponendo che i tre punti dati stiano sul piano (cioè sostituendo le coordinate nell'equazione) otteniamo $a+d=0, b+d=0, 2c+d=0$, da cui, ad esempio per $d=-2$ si ha $a=2, b=2, c=1$, cioè l'equazione cartesiana $2x+2y+z-2=0$ per il piano. Dalla formula per la distanza punto-piano abbiamo $dist((1,0,3),S) = \dfrac{|2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 0-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 2$

9. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, f(x,y,z,t) = (y,x,z,z+t)$. La molteplicità algebrica di 1 è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è c. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda^2-1) = -(1-\lambda)^3(1+\lambda)$, dunque la molteplicità algebrica di 1 è 3.

10. In $\mathbb{R}^3$ la dimensione dello span di $X = \{xyz = 0\}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è c. L'equazione $xyzt = 0$, per legge di annullamento del prodotto, equivale a $x=0$ or $y=0$ or $z=0$. In altri termini X è dato dall'unione dei tre assi coordinati di $\mathbb{R}^3$, dunque il suo span coincide con tutto $\mathbb{R}^3$.

11. Per quali dei seguenti valori di x la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ x & 2x \end{pmatrix}$ risulta triangolabile su $\mathbb{R}$?
$\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è d. Infatti basta vedere che tutti gli autovalori stiano in $\mathbb{R}$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda(2x-\lambda)+4x = \lambda^2-2x\lambda+4x$; si ha $\frac{\Delta}{4} = x^2-4x = x(x-4)$, che è ≥ 0 per $x \leq 0$ or $x \geq 4$. Tra i valori proposti solo 4 è dunque ammissibile.

12. Se 0 è autovalore per un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ allora
$\boxed{\text{a}}$ $ker(f) = 0$ $\boxed{\text{b}}$ $ker(f) \neq 0$ $\boxed{\text{c}}$ f è suriettiva $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è b. Infatti se esiste un $u \neq 0$ autovettore per 0, allora $f(u) = 0$, dunque $u \in ker(f)$. In effetti l'autospazio relativo a 0 è sempre uguale al nucleo.

13. Quale dei seguenti insiemi costituisce una base per $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?
$\boxed{\text{a}}$ $0, 1, x$ $\boxed{\text{b}}$ $x^2 + 2x + 1, x + 1, x(x + 1)$ $\boxed{\text{c}}$ $0, 1, x, x^2$ $\boxed{\text{d}}$ $x^2 - 1, x - 1, x + 1$
Soluzione. La risposta è d. Infatti a e c contengono il vettore nullo, dunque non possono essere basi. In b il primo vettore è la somma degli altri due.

14. Quale delle seguenti rappresenta un'isometria di $\mathbb{R}^2$?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è a. Le isometrie sono date da moltiplicazione per una matrice ortogonale più eventualmente un vettore di traslazione. Solo a soddisfa questa condizione; in effetti è la traslazione di vettore $(0, 1)$.

15. In $\mathbb{R}^4$ le coordinate di $(1, 0, 1, 0)$ rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono
$\boxed{\text{a}}$ $(1, 2, 3, 4)$ $\boxed{\text{b}}$ $(1, 1, 1, 1)$ $\boxed{\text{c}}$ $(1, -1, 1, -1)$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è c. Infatti è quel che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.