Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T. Prova d'esame del 17/02/2014. Soluzioni. Versione 6.♠ 7.♠

1. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è c, il che si può vedere riducendo la matrice per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La dimensione di $V = \{f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tali che $f(0,0,1) = 0, f(0,1,0) \in span(1,0)\}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è c. Una tale f ha matrice associata $\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $f(1,0,0) = (a,b)$, $f(0,1,0) = (c,0) \in span(1,0)$,e $f(0,0,1) = 0$ dunque dipende da 3 paramentri indipendenti.

3. In $\mathbb{R}^3$ quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$? $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 1 $\boxed{\text{c}}$ 2 $\boxed{\text{d}}$ infinite

Soluzione. La risposta è b. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ il cui determinante è non nullo, dunque il sistema ha solo la soluzione banale $(0,0,0)$.

4. In $\mathbb{R}^2$ la conica $x^2 + x + y + 1 = 0$ è $\boxed{\text{a}}$ ellisse reale $\boxed{\text{b}}$ parabola $\boxed{\text{c}}$ iperbole $\boxed{\text{d}}$ $\varnothing$

Soluzione. La risposta è b. Completando i quadrati abbiamo che $x^2+x+y+1 = (x+\frac{1}{2})^2+y+\frac{3}{4}$, dunque a meno di un cambio di variabile affine la conica si scrive come $X^2 + Y = 0$, che è la forma canonica della parabola.

5. Gli autovalori di $f(x,y,z) = (x+2z, x+y-z, 2x+z)$ sono $\boxed{\text{a}}$ 1,2,3 $\boxed{\text{b}}$ 1,0,-1 $\boxed{\text{c}}$ 1,-1,3 $\boxed{\text{d}}$ $\pm\sqrt{3}$

Soluzione. La risposta è c. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$, che ha radici 1,-1,3.

6. La forma bilineare $\begin{pmatrix} x^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è non degenere $\boxed{\text{a}}$ mai $\boxed{\text{b}}$ sempre $\boxed{\text{c}}$ solo se $x > 0$ $\boxed{\text{d}}$ solo se $x \neq 0$

Soluzione. La risposta è d. La forma è non degenere se e solo se la matrice è non degenere. Il determinante è $-x^2$, che si annulla solo per $x = 0$.

7. In $\mathbb{R}^3$ le rette $r = \{(x, y, z) : x - y = y - z = 0\}$ e $s = span(1, 1, 0)$ sono tra loro
$\boxed{\text{a}}$ parallele $\boxed{\text{b}}$ sghembe $\boxed{\text{c}}$ incidenti $\boxed{\text{d}}$ uguali
Soluzione. La risposta è c. La giacitura di r è $(1, 1, 1)$, dunque diversa da quella di s che è $(1, 1, 0)$. Le due rette si incontrano in $(0, 0, 0)$ dunque non sono sghembe ma incidenti.

8. In $\mathbb{R}^3$ la distanza tra $(2, 2, 3)$ e il piano passante per $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è c. L'equazione cartesiana di un generico piano S di $\mathbb{R}^3$ è $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo che i tre punti dati stiano sul piano (cioè sostituendo le coordinate nell'equazione) otteniamo $a + d = 0, b + d = 0, 2c + d = 0$, da cui, ad esempio per $d = -2$ si ha $a = 2, b = 2, c = 1$, cioè l'equazione cartesiana $2x + 2y + z - 2 = 0$ per il piano. Dalla formula per la distanza punto-piano abbiamo $dist((1, 0, 3), S) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$

9. Sia $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4, f(x, y, z, t) = (y, -x, iz, it)$. La molteplicità geometrica di i è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è c. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$; la matrice di $f - iId$ è $\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, che ha rango 1 perché la seconda riga è $-i$ per la prima. Quindi ha ker 3-dimensionale.

10. In $\mathbb{R}^2$ la dimensione dello span di $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è b. Infatti l'insieme dato contiene $(1, 1)$ e $(1, -1)$ che costituiscono una base per tutto il piano, dunque il suo span è tutto $\mathbb{R}^2$.

11. Per quali dei seguenti valori di x la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - x^2 & 0 \end{pmatrix}$ risulta triangolabile su $\mathbb{R}$?
$\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è a. Infatti basta vedere che tutti gli autovalori stiano in $\mathbb{R}$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + x^2 - 1$; si ha $\Delta = 0^2 - 4(x^2 - 1) = -4(x^2 - 1)$, che è ≥ 0 per $-1 \leq x \leq 1$. Tra i valori proposti solo 1 è dunque ammissibile.

12. Se 1 è autovalore per un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ allora
$\boxed{\text{a}}$ $f(x) = 1$ $\boxed{\text{b}}$ $\forall x f(x) = x$ $\boxed{\text{c}}$ $f(x) = \lambda x$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è d. Infatti a non è nemmeno una funzione a valori in $\mathbb{R}^3$, b è falsa in quanto ad esempio una rotazione in $\mathbb{R}^3$ è un endomorfismo con autovalore 1 ma diverso dall'identità $f(x) = x$. La proposta c semplicemente non vuol dire nulla se non si quantificano opportunamente x e λ; se la si

vuole interpretare come $\forall x \exists \lambda$ allora è proprio falsa perché vorrebbe dire che ogni vettore è autovettore (e la rotazione detta precedentemente costituise controesempio).

13. Quale dei seguenti insiemi costituisce una base per $\mathbb{C}_{\leq 2}[x]$?
$\boxed{\text{a}}$ $1, i, x$ $\boxed{\text{b}}$ $1, x$ $\boxed{\text{c}}$ $x-i, x+i, (x-i)(x+i)$ $\boxed{\text{d}}$ $1, i, x, x^2$
Soluzione. La risposta è c. Infatti il secondo vettore di a è i per il primo, e lo stesso vale per d. In b ci sono pochi vettori per essere una base.

14. Quale delle seguenti rappresenta una rotazione di $\mathbb{R}^2$?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è c. Le rotazioni sono date da moltiplicazione per una matrice ortogonale di determinante 1. In b c'è anche una traslazione dunque non va bene, mentre a non è ortogonale. c è ortogonale con determinante 1.

15. In $\mathbb{R}^4$ le coordinate di $(1, 2, 3, 4)$ rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono
$\boxed{\text{a}}$ $(1, 2, 3, 4)$ $\boxed{\text{b}}$ $(1, -1, 1, -1)$ $\boxed{\text{c}}$ $(1, 1, 1, 1)$ $\boxed{\text{d}}$ $(1, 0, 1, 1)$
Soluzione. La risposta è d. Infatti è quel che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.