Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T. Prova d'esame del 17/02/2014. Soluzioni. Versione 6.♡ 7.♡

1. Il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i & 1-i \\ 1+i & i-1 & 2i & 2 \\ i & -1 & i-1 & 1+i \end{pmatrix}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è a, infatti la seconda riga è la somma delle altre due e la terza è i per la prima, quindi c'è una sola riga linearmente indipendente.

2. La dimensione di $V = \{f \in Hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tali che $f(1,0,0) \in span(1,0), f(0,0,1) = f(0,1,0) = 0\}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è a. Una tale f ha matrice associata $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $f(1,0,0) = (a,0) \in span(1,0)$, $f(0,1,0) = f(0,0,1) = 0$ dunque dipende da 1 paramentri indipendenti.

3. In $\mathbb{R}^3$ quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} x - z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$? $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 1 $\boxed{\text{c}}$ 2 $\boxed{\text{d}}$ infinite

Soluzione. La risposta è d. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ il cui determinante è nullo, ma ha il primo minore di ordine 2 non nullo, dunque ha rango 2. Se aggiungo il termine noto $(1,0,1)$ come quarta colonna il rango resta 2 perché tale colonna si scrive come la prima meno la seconda colonna della matrice dei coefficienti. Per Rouché -Capelli ho uno spazio 1-dimensionale di soluzioni.

4. In $\mathbb{R}^2$ la conica $x^2 - y^2 + x - y + 1 = 0$ è $\boxed{\text{a}}$ ellisse reale $\boxed{\text{b}}$ parabola $\boxed{\text{c}}$ iperbole $\boxed{\text{d}}$ $\varnothing$

Soluzione. La risposta è c. Completando i quadrati abbiamo che $x^2-y^2+x-y+1 = (x+\frac{1}{2})^2-(y+\frac{1}{2})^2+1$, dunque a meno di un cambio di variabile affine la conica si scrive come $X^2 - Y^2 - 1 = 0$, che è la forma canonica dell'iperbole.

5. Gli autovalori di $f(x,y,z) = (3z, x-y-z, x)$ sono $\boxed{\text{a}}$ 1,2,3 $\boxed{\text{b}}$ 1,0,-1 $\boxed{\text{c}}$ 1,-1,3 $\boxed{\text{d}}$ $\pm\sqrt{3}, -1$

Soluzione. La risposta è d. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(1+\lambda)(\lambda^2 - 3)$.

6. La forma bilineare $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ è definita positiva $\boxed{\text{a}}$ mai $\boxed{\text{b}}$ sempre $\boxed{\text{c}}$ solo se $x > 0$ $\boxed{\text{d}}$ solo se $x \neq 0$

Soluzione. La risposta è a. La forma è definita positiva se e solo se la matrice ha tutti autovalori positivi. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda) - x^2 = \lambda^2 - \lambda - x^2$. Abbiamo $\Delta = 1 + 4x^2 > 0$ e le soluzioni

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4x^2}}{2}$ sono sempre una positiva e una negativa. Molto più semplicemente e_1 è un vettore isotropo non nullo per questa forma, cosa che non può succedere per forme definite positive.

7. In $\mathbb{R}^3$ le rette $r = \{(x, y, z) : x - y = y - z = 1\}$ e $s = span(1, 2, 1)$ sono tra loro
$\boxed{\text{a}}$ parallele $\boxed{\text{b}}$ sghembe $\boxed{\text{c}}$ incidenti $\boxed{\text{d}}$ uguali
Soluzione. La risposta è b. La giacitura di r è $(1, 1, 1)$, dunque diversa da quella di s che è $(1, 2, 1)$. Il generico punto di s ha coordinate $(t, 2t, t)$ e abbiamo che $t - 2t = 2t - t = 1$ non è mai verificato, dunque non si intersecano e quindi sono sghembe.

8. In $\mathbb{R}^3$ la distanza tra $(2, 3, 4)$ e il piano passante per $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è d. L'equazione cartesiana di un generico piano S di $\mathbb{R}^3$ è $ax + by + cz + d = 0$. Imponendo che i tre punti dati stiano sul piano (cioè sostituendo le coordinate nell'equazione) otteniamo $a + d = 0, b + d = 0, 2c + d = 0$, da cui, ad esempio per $d = -2$ si ha $a = 2, b = 2, c = 1$, cioè l'equazione cartesiana $2x + 2y + z - 2 = 0$ per il piano. Dalla formula per la distanza punto-piano abbiamo $dist((1, 0, 3), S) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 4$

9. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, f(x, y, z, t) = (y, x, z, z + t)$. La molteplicità geometrica di -1 è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è a. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; la matrice di $f + 1Id$ è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, che ha rango 3 perché la seconda riga è uguale alla prima, ma il minore di ordine 3 in basso a destra è non nullo. Quindi ha ker 1-dimensionale.

10. In $\mathbb{R}^3$ la dimensione dello span di $X = \{x = y = z = 1\}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è a. Infatti l'insieme dato consiste del singolo punto $(1, 1, 1)$, dunque il suo span è la retta che passa per l'origine con direzione $(1, 1, 1)$.

11. Per quali dei seguenti valori di x la matrice $\begin{pmatrix} e^x & \log x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

$\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è a. Infatti per $x = 1$ viene la matrice identità che è diagonale; siccome di risposte giuste ce n'è una sola le altre son sbagliate.

12. Se 2 è autovalore per un endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ allora
$\boxed{\text{a}}$ $f(x) = x^2$ $\boxed{\text{b}}$ $f(x) = 2$ $\boxed{\text{c}}$ $f(x) = \lambda x$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è d. Infatti a e b non sono nemmeno funzioni a valori in $\mathbb{R}^3$ (qualunque cosa voglia dire fare un vettore al quadrato). La proposta c semplicemente non vuol dire nulla se non si quantificano

opportunamente x e λ; se la si vuole interpretare come $\forall x \exists \lambda$ allora è proprio falsa perché vorrebbe dire che ogni vettore è autovettore.

13. Quale dei seguenti insiemi costituisce una base per $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?
$\boxed{\text{a}}$ $1+x^2, (1+x)^2, x^2$ $\boxed{\text{b}}$ $0, 1, x, x^2$ $\boxed{\text{c}}$ $x-1, x+1, 2$ $\boxed{\text{d}}$ $1, 1-x, 1-x^2, 1-x-x^2$
Soluzione. La risposta è a. Infatti b contiene lo zero, d ha troppi vettori per essere una base, e in c il terzo vettore è la differenza dei primi due.

14. Quale delle seguenti rappresenta un'isometria di $\mathbb{R}^2$ che manda $(1,0)$ in $(1,1)$ e $(0,0)$ in $(0,0)$?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è d. Le isometrie sono date da moltiplicazione per una matrice ortogonale più eventualmente una traslazione. Ma se voglio che l'origine resti fissa, non ci deve essere traslazione, dunque escludo b; le matrici in a e c non sono ortogonali (ad esempio le colonne non formano una base ortonormale per il prodotto scalare standard)

15. In $\mathbb{R}^4$ le coordinate di $(1,2,3,4)$ rispetto alla base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono
$\boxed{\text{a}}$ $(1,-1,1,-1)$ $\boxed{\text{b}}$ $(1,-2,3,-4)$ $\boxed{\text{c}}$ $(1,2,3,4)$ $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è a. Infatti è quel che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

.