Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T.
Prova d'esame del 17/02/2014 (II turno). Soluzioni. Versione 6. ♣ 7. ♡

1. L'immagine dell'applicazione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha dimensione è $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 4 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è d. Tale dimensione è pari al rango della matrice, che è 3 in quanto le prime 3 colonne danno un minore non nullo.

2. La dimensione di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4
Soluzione. La risposta è d. Infatti un vettore di $\mathbb{C}^2$ è della forma $(a + ib, c + id)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. In altre parole una base di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$ è data da $(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)$.

3. Quale dei seguenti può essere un autovalore di una funzione F tale che $F^3 = Id$? $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 1 $\boxed{\text{c}}$ -1 $\boxed{\text{d}}$ i
Soluzione. La risposta è b. Gli autovalori di F^3 sono il cubo degli autovalori di F, e se $F^3 = Id$ allora gli autovalori di F devono essere tali che $\lambda^3 = 1$. Tra i numeri proposti solo 1 soddisfa questo requisito.

4. In $\mathbb{R}^2$ la conica $x^2 + 2x = 1$ è $\boxed{\text{a}}$ ellisse $\boxed{\text{b}}$ parabola $\boxed{\text{c}}$ due rette parallele $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti
Soluzione. La risposta è c. Completando i quadrati abbiamo che $x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$, dunque a meno di un cambio di variabile affine la conica si scrive come $X^2 - 1 = 0$, che è la forma canonica della coppia di rette parallele.

5. Un sistema omogeneo di 5 equazioni in 3 incognite $\boxed{\text{a}}$ non ha mai soluzione $\boxed{\text{b}}$ ha sempre almeno una soluzione $\boxed{\text{c}}$ ha soluzione solo in certi casi $\boxed{\text{d}}$ ha sempre soluzione unica
Soluzione. La risposta è b. Essendo omogeneo ha sempre almeno la soluzione banale $(0, 0, 0)$.

6. In $\mathbb{R}^2$ la matrice della forma bilineare $b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2)y_2$ nella base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è : $\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Soluzione. La risposta è c. Si vede calcolando $b((1, 0), (1, 0)) = (1+0)0 = 0$ e $b((1, 1), (1, 1)) = (1+1)1 = 2$: questa deve essere la diagonale della matrice della forma.

7. Quali dei seguenti vettori di $\mathbb{C}^3$ sono linearmente indipendenti tra loro? $\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione. La risposta è a perché la matrice che ha loro come colonne ha determinante $i+i+i-(1-1+i) = 2i \neq 0$ e dunque ha rango massimo.

8. La segnatura di $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è $\boxed{\text{a}}$ (0,1,2) $\boxed{\text{b}}$ (1,1,1) $\boxed{\text{c}}$ (2,0,1) $\boxed{\text{d}}$ (0,2,1)

Soluzione. La risposta è a. Per vederlo si possono calcolare esplicitamente gli autovalori: il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(1+\lambda)(-\lambda(1-\lambda)-1) = (1+\lambda)(-\lambda^2+\lambda+1)$ e il fattore di secondo grado ha radici $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$, che sono una positiva e una negativa. Dunque ho un autovalore positivo e due autovalori negativi.

9. La funzione da $\mathbb{R}^3$ in sé definita da $f(x,y,z) = (z,y,x)$ è
$\boxed{\text{a}}$ una rotazione $\boxed{\text{b}}$ una riflessione $\boxed{\text{c}}$ una traslazione $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione. La risposta è b. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che è ortogonale (perché le colonne sono ortonormali) di determinante -1. Per definizione, questa è una riflessione.

10. In $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard, la proiezione di $(1,2,3)$ sull'ortogonale di $(1,1,1)$ è
$\boxed{\text{a}}$ (1,0,1) $\boxed{\text{b}}$ (1,0,-1) $\boxed{\text{c}}$ (1,-2,1) $\boxed{\text{d}}$ (-1,0,1)

Soluzione. La risposta è d. L'ortogonale a (1,1,1) è il piano $x+y+z=0$. Per determinare la proiezione bisogna trovare la retta per (1,2,3) ortogonale a tale piano e il loro punto di intersezione. Ma tale retta avrà tautologicamente giacitura (1,1,1) e dunque equazioni $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$ Mettendo queste equazioni a sistema con quelle del piano si ottiene un sistema di ordine 3 con unica soluzione (-1,0,1)

11. In $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ le coordinate di $(1+x)^2$ rispetto alla base $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ sono $\boxed{\text{a}}$ (1,2,1) $\boxed{\text{b}}$ (0,2,0) $\boxed{\text{c}}$ (-1,1,1) $\boxed{\text{d}}$ $(0,1,0)^2$

Soluzione. La risposta è c. Infatti $-1+1+x+1+x+x^2 = 1+2x+x^2 = (1+x)^2$. NOTA: la scrittura in d non ha senso!

12. Quanti blocchi ha la forma di Jordan di $f(x,y,z,s,t) = (0, -y+z, -y+z, t, 0)$?
$\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è c. Il numero dei blocchi è pari alla somma delle molteplicità geometrica degli autovalori di f. La matrice di f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e la matrice di $f - \lambda Id$ è

$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ Il polinomio caratteristico viene (magari usando Laplace in modo furbo) $p(\lambda) = -\lambda^3((-1-\lambda)(1-\lambda)+1) = -\lambda^5$. Dunque l'unico autovalore è 0. La molteplicità geometrica di 0 sarà pari a 5 meno il rango della matrice di $f - 0Id = f$, cioè quella iniziale, che è chiaramente 2, dunque 5-2=3 è la dimensione dell'autospazio di 0 e il numero di blocchi di Jordan.

13. Gli autovalori di $f(x, y, z) = (x + z, y + z, x + z)$ sono
$\boxed{\text{a}}$ 0,1,2 $\boxed{\text{b}}$ 1,-1,2 $\boxed{\text{c}}$ 0,-1 $\boxed{\text{d}}$ 0,1,-1

Soluzione. La risposta è a. La matrice di f in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e e la matrice di $f - \lambda Id$ è $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, dunque il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-1) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$.

14. Quale dei seguenti è un prodotto scalare?
$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Soluzione. La risposta è c. Bisogna cercare la matrice simmetrica definita positiva. L'unica con determinante positivo è la c.

15. Una base delle soluzioni del sistema $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - y - 2z - 2t = 0 \end{cases}$ è:

$\boxed{\text{a}}$ $(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 1)$ $\boxed{\text{b}}$ $(1, 0, 0, 1)$,(1,-2,1,1) $\boxed{\text{c}}$ (0,2,-1,0) $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione. La risposta è b. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ che ha rango 2, quindi le soluzioni costituiscono uno spazio di dimensione 4-2=2. Inserendo i valori si vede che i vettori proposti in b soddisfano il sistema, quelli in a invece no.