Ing. elettrica, dell'automazione e dell'energia elettrica. Geometria e Algebra T. Prova d'esame del 17/02/2014 (II turno). Soluzioni. Versione 6. ♣ 7. ♣

1. L'immagine dell'applicazione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha dimensione è $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 4 $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione. La risposta è b. Tale dimensione è pari al rango della matrice, che è 2 in quanto la prima riga è nulla ma nelle prime due colonne ho un minore di ordine 2 non nullo.

2. La dimensione di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$ è $\boxed{\text{a}}$ 1 $\boxed{\text{b}}$ 2 $\boxed{\text{c}}$ 3 $\boxed{\text{d}}$ 4

Soluzione. La risposta è b. Infatti un vettore di $\mathbb{C}$ è della forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. In altre parole una base di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$ è data da $1, i$.

3. Quale dei seguenti NON può essere un autovalore di una funzione F tale che $F^4 = Id$? $\boxed{\text{a}}$ 0 $\boxed{\text{b}}$ 1 $\boxed{\text{c}}$ -1 $\boxed{\text{d}}$ i

Soluzione. La risposta è a. Gli autovalori di F^4 sono gli autovalori di F alla quarta, e se $F^4 = Id$ allora gli autovalori di F devono essere tali che $\lambda^4 = 1$. Tra i numeri proposti solo 0 NON soddisfa questo requisito.

4. In $\mathbb{R}^2$ la conica $x^2 + 2x + 1 = 0$ è $\boxed{\text{a}}$ ellisse $\boxed{\text{b}}$ parabola $\boxed{\text{c}}$ due rette parallele $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione. La risposta è d. Completando i quadrati abbiamo che $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, dunque a meno di un cambio di variabile affine la conica si scrive come $X^2 = 0$, che è la forma canonica della retta doppia.

5. Un sistema di 3 equazioni in 5 incognite $\boxed{\text{a}}$ non ha mai soluzione $\boxed{\text{b}}$ ha sempre almeno una soluzione $\boxed{\text{c}}$ ha soluzione solo in certi casi $\boxed{\text{d}}$ ha sempre soluzione unica

Soluzione. La risposta è c. Non essendo omogeneo, non è garantito che ci sia sempre una soluzione: la condizione di risolubilità è espressa dal teorema di Rouché-Capelli.

6. In $\mathbb{R}^2$ la matrice della forma bilineare $b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1 + x_2)y_2$ nella base $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è : $\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione. La risposta è a. Si vede calcolando $b((1, 1), (1, 1)) = (1 + 1)1 = 2$ e l'unica matrice con primo elemento 2 è la prima.

7. Quali dei seguenti vettori di $\mathbb{C}^3$ sono linearmente indipendenti tra loro? $\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$

$\boxed{b}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{c}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ $\boxed{d}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione. La risposta è b perché la matrice che ha loro come colonne ha determinante $0 + 0 - 1 - (i + 0 + 0) = -1 - i \neq 0$ e dunque ha rango massimo.

8. La segnatura di $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è $\boxed{a}$ (0,1,2) $\boxed{b}$ (1,1,1) $\boxed{c}$ (2,0,1) $\boxed{d}$ (0,2,1)

Soluzione. La risposta è d. Per vederlo si possono calcolare esplicitamente gli autovalori: il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda(1-\lambda) - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1)$ e il fattore di secondo grado ha radici $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, che sono una positiva e una negativa. Dunque ho due autovalori positivi e uno negativo.

9. La funzione da $\mathbb{R}^3$ in sé definita da $f(x, y, z) = (z, y, -x)$ è

$\boxed{a}$ una rotazione $\boxed{b}$ una riflessione $\boxed{c}$ una traslazione $\boxed{d}$ nessuna delle precedenti

Soluzione. La risposta è a. La matrice associata a f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che è ortogonale (perché le colonne sono ortonormali) di determinante 1. Per definizione, questa è una rotazione.

10. In $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard, la proiezione di $(1, 2, 0)$ sull'ortogonale di $(1, 1, 1)$ è

$\boxed{a}$ (1,0,1) $\boxed{b}$ (0,1,-1) $\boxed{c}$ (1,-2,1) $\boxed{d}$ (-1,0,1)

Soluzione. La risposta è b. L'ortogonale a (1,1,1) è il piano $x + y + z = 0$. Per determinare la proiezione bisogna trovare la retta per (1,2,0) ortogonale a tale piano e il loro punto di intersezione. Ma tale retta avrà tautologicamente giacitura (1,1,1) e dunque equazioni $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ Mettendo queste equazioni a sistema con quelle del piano si ottiene un sistema di ordine 3 con unica soluzione (0,1,-1).

11. In $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ le coordinate di $(1+x)^2$ rispetto alla base $\{1 + x, 1, 1 + x + x^2\}$ sono $\boxed{a}$ (1,-1,1) $\boxed{b}$ (2,0,0) $\boxed{c}$ (-1,1,1) $\boxed{d}$ $(1, 0, 0)^2$

Soluzione. La risposta è a. Infatti $1 + x - 1 + 1 + x + x^2 = 1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2$. NOTA: la scrittura in d non ha senso!

12. Quanti blocchi ha la forma di Jordan di $f(x, y, z, s, t) = (0, -y + z, -y + z, t, 0)$?

$\boxed{a}$ 4 $\boxed{b}$ 3 $\boxed{c}$ 2 $\boxed{d}$ 1

Soluzione. La risposta è b. Il numero dei blocchi è pari alla somma delle molteplicità geometrica degli autovalori di f. La matrice di f in base canonica è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e la matrice di $f - \lambda Id$ è

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$ Il polinomio caratteristico viene (magari usando Laplace in modo furbo) $p(\lambda) = -\lambda^3((-1-\lambda)(1-\lambda)+1) = -\lambda^5$. Dunque l'unico autovalore è 0. La molteplicità geometrica di 0 sarà pari a 5 meno il rango della matrice di $f - 0Id = f$, cioè quella iniziale, che è chiaramente 2, dunque 5-2=3 è la dimensione dell'autospazio di 0 e il numero di blocchi di Jordan.

13. Gli autovalori di $f(x, y, z) = (x + z, -y + z, x + z)$ sono

$\boxed{\text{a}}$ 0,1,2 $\boxed{\text{b}}$ 0,-1,2 $\boxed{\text{c}}$ 0,-1 $\boxed{\text{d}}$ 0,1,-1

Soluzione. La risposta è b. La matrice di f in base canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e e la matrice di $f - \lambda Id$ è $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, dunque il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) + (1+\lambda) = \lambda(1+\lambda)(2-\lambda)$.

14. Quale dei seguenti è un prodotto scalare?

$\boxed{\text{a}}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{c}}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{d}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Soluzione. La risposta è a. Bisogna cercare la matrice simmetrica definita positiva. L'unica con determinante positivo è la a.

15. Una base delle soluzioni del sistema $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + 2z + t = 0 \\ 2x - y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$ è:

$\boxed{\text{a}}$ (1,2,-1,-1),(1,0,0,-1) $\boxed{\text{b}}$ (1, 0, 0, 1),(1,-2,1,1) $\boxed{\text{c}}$ (0,2,-1,0) $\boxed{\text{d}}$ nessuna delle precedenti

Soluzione. La risposta è a. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ che ha rango 2, quindi le soluzioni costituiscono uno spazio di dimensione 4-2=2. Inserendo i valori si vede che i vettori proposti in a soddisfano il sistema, quelli in b invece no.