# Esercizi su applicazioni lineari

Per tutto il seguito, se non specificato esplicitamente $\mathbb{K}$ indicherà un campo e $V, W, U$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

## 1. Cose da ricordare

**Definizione 1.1.** *Una funzione $f : V \to W$ si dice* **lineare** *se per ogni scelta di $v_i \in V$ e $\lambda_i \in \mathbb{K}$*

$$f(\sum_i \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i f(v_i).$$

**Teorema 1.2.** *$f$ è lineare se e solo se*

- *$\forall v, w \in V$ si ha $f(v + w) = f(v) + f(w)$*
- *$\forall v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha $f(\lambda v) = \lambda f(v)$*

*Dimostrazione.* Con somma e prodotto per scalari si costruiscono tutte le combinazioni lineari. □

**Teorema 1.3.** *Data una base $v_1, \dots, v_n$ di $V$, ogni applicazione lineare $f : V \to W$ è univocamente determinata dal valore che $f$ assume sui vettori di base. Viceversa, dati $w_i \in W$ a piacere, esiste sempre $f : V \to W$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$.*

*Dimostrazione.* Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \sum_i \lambda_i v_i$. Per linearità si ha $f(v) = \sum_i \lambda_i f(v_i)$. Viceversa, definendo $f(v) = \sum_i \lambda_i w_i$ si ottiene un'applicazione lineare $f$ (perché $f$ cosí definita è lineare?) tale che $f(v_i) = w_i$. □

**Definizione 1.4.** *Sia $f : V \to W$. $\ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$ è un sottospazio di $V$. $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) : v \in V\}$ è un sottospazio di $W$.*

**Teorema 1.5.** *$f : V \to W$ lineare è iniettiva se e solo se $\ker(f) = 0$. È suriettiva se e solo se $\mathrm{Im}(f) = W$.*

*Dimostrazione.* lasciata per esercizio.

**Definizione 1.6.** *Data una base $v_1, \dots, v_n$ di $V$, ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di base: $v = \sum_i \lambda_i v_i$. Il vettore dei coefficienti $\lambda_i$ si chiama vettore delle coordinata di $v$ nella base $B$ e si indica*

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.7.** *Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di $V$ le coordinate forniscono un'isomorfismo lineare*

$$\varphi_B : V \to \mathbb{K}^n \qquad \varphi_B(v) = [v]_B$$

*Dimostrazione.* Lasciata al lettore per esercizio.

**Definizione 1.8.** *Data $f : V \to W$ lineare, $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ base di $V$ e $B_W = (w_1, \dots, w_m)$ base di $W$. La matrice associata a $f, B_V, B_W$ è la matrice $M(f)_{B_V,B_W}$ che ha come i-esima colonna il vettore delle coordinate di $f(v_i)$ rispetto alla base $B_W$.*

**Teorema 1.9.** *Se $\left[v\right]_{B_V}$ indica il vettore colonna delle coordinate di $v$ rispetto alla base $B_V$, $\left[f(v)\right]_{B_W}$ indica il vettore colonna delle coordinate di $f(v)$ rispetto alla base $B_W$ e $A = M(f)_{B_V,B_W}$, allora*

$$\left[f(v)\right]_{B_W} = A \left[v\right]_{B_V}$$

*Dimostrazione.* Basta eseguire il calcolo e ricordare che se $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ allora $AX$ è la combinazione lineare delle colonne di $A$ con i coefficienti $x_i$. $\square$

**Teorema 1.10.** *$f : V \to W$ lineare è iniettiva se e solo se il rango della matrice associata è uguale alla dimensione di $V$. È suriettiva se e solo se il rango della matrice associata è uguale alla dimensione di $W$. È invertibile se e solo se la matrice associata è invertibile, se e solo se ha determinante diverso da zero. Se le dimensioni di $V$ e di $W$ sono uguali, allora $f$ è iniettiva se e solo se è suriettiva se e solo se è invertibile.*

*Dimostrazione.* lasciata per esercizio. $\square$

**Teorema 1.11.** *Se $f : V \to W$ e $g : W \to U$ allora*

$$M(g \circ f)_{B_V,B_U} = M(g)_{B_W,B_U} M(f)_{B_V,B_W}$$

*Dimostrazione.* La verifica di questo fatto è immediata usando l'associatività del prodotto tra matrici, l'importante è che si usi sempre la stessa base di $W$ sia per la $f$ che per la $g$.

**Teorema 1.12.** *Date le basi $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ di $V$ e $B_W = (w_1, \dots, w_m)$ di $W$, l'applicazione*

$$\mu_{B_v,B_W} : L(V, W) \to M_{m\times n} \qquad f \mapsto M(f)_{B_v,B_W}$$

*che associa ad ogni applicazione lineare $f$ la sua matrice nelle basi $B_v$ e $B_W$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali.*

*Dimostrazione.* La linearità si verifica controllando che la matrice associata a $f+g$ è la somma delle matrici associate a $f$ e $g$ rispettivamente e che la matrice di $\lambda f$ è $\lambda$ per la matrice di $f$.

Iniettività: Se la matrice associata a $f$ è la matrice nulla allora $[f(v)]_{B_W} = 0$ per ogni $v$. Ma siccome le coordinate sono un isomorfismo lineare, l'unico vettore di coordinate nulle è lo zero. Quindi $f$ è l'applicazione identicamente nulla, che è lo zero di $L(V,W)$.

Suriettività: Data una matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, le cui colonne numeriamo con $C_1,\dots,C_n$, l'applicazione $f' : V \to \mathbb{K}^m$ definita da $f'(\sum \lambda_i v_i) = \sum_i \lambda_i C_i$ è lineare; siccome le coordinate nella base $B_W$ sono un'isomorfismo lineare $\varphi_{B_W} : W \to \mathbb{K}^m$, l'applicazione $f : V \to W$ definita da

$$f = \varphi_{B_W}^{-1} \circ f'$$

è lineare ed è immediato controllare che $M(f)_{B_V,B_W} = A$. Quindi ogni $A$ è nell'immagine di $\mu_{B_V,B_W}$ che quindi è suriettiva. $\square$

**Corollario 1.13.** *Sia $Q$ un sottoinsieme di $L(V,W)$, per capire se $Q$ sia o meno un sottospazio vettoriale e per calcolarne la dimensione basta studiare l'immagine $\mu_{B_V,B_W}(Q)$ come sottoinsieme di $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ossia $Q$ è sottospazio se e solo se lo è $\mu_{B_V,B_W}(Q)$ e in caso affermativo hanno la stessa dimensione (sono infatti isomorfi).*

*Dimostrazione.* La restrizione di $\mu_{B_V,B_W}$ è un isomorfismo lineare quindi $Q$ è chiuso per somma e prodotto per scalare se e solo se lo è $\mu_{B_V,B_W}(Q)$. La restrizione di un isomorfismo ad un sottospazio è sempre un isomorfismo di tale sottospazio con la sua immagine. $\square$

**Esercizio 1.14.** *Dimostrare che, con le notazioni sin qui usate,*

$$M(f)_{B_V,B_W} = M(\varphi_{B_W} \circ f \circ \varphi_{B_V}^{-1})_{can,can}$$

*Dimostrazione.* Lasciata al lettore per esercizio.

## 2. Esercizi svolti ed esempi

**Esercizio 2.1** (Che intreccia il cervello)**.** *Siano $B_V$ e $B_W$ basi di $V$ e $W$. Siccome $L(V,W)$ è uno spazio vettoriale, ha una base. Trovarne una e scrivere la matrice associata a $\mu_{B_V,B_W} : L(V,W) \to M_{m\times n}(\mathbb{K})$ rispetto a tale base e alla base canonica di $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

*Dimostrazione.* Siccome $L(V,W)$ è isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ha dimensione $mn$ ed esiste una base tale che la matrice associata a $M_{B_V,B_W}$ è l'identità. Troviamola.

Basta porre $f_{ij} = (\mu_{B_V,B_W})^{-1}(E_{ij})$ ove $E_{ij}$ è la base canonica di $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tale applicazione è definita da

$$f_{ij}(v_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_k \neq v_j \\ w_i & \text{se } v_h = v_j \end{cases}$$

ed ha appunto matrice associata $E_{ij}$ rispetto alle basi $B_v$ e $B_w$.

**Esercizio 2.2.** *Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ data da $f(x,y) = (x+y, x+iy, y)$. Si scriva la matrice associata a $f$ nelle basi canoniche di $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^3$ e poi quella nelle basi $B_2 = (v_1, v_2)$ con $v_1 = (1,i), v_2 = (1,0)$ e $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$ con $w_1 = (1,0,1), w_2 = (0,i,0), w_3 = (0,0,1)$. Si scriva la matrice $A_2$ di cambio di base dalla base $B_2$ alla base canonica di $\mathbb{C}^2$. Si scriva la matrice $A_3$ del cambio di base dalla base canonica di $\mathbb{C}^3$ a $B_3$. Si verifichi che $M(f)_{B_2,B_3} = A_3 M(f)_{can,can} A_2$.*

Soluzione. Parte prima, in basi canoniche. Si devono calcolare le coordinate di $f(e_1)$ e $f(e_2)$ e metterle come colonne della matrice. $f(e_1) = f(1,0) = (1,1,0)$ e $f(e_2) = f(0,1) = (1,i,1)$ quindi

$$M(f)_{can,can} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte seconda, le altre basi. Si devono calcolare le coordinate di $f(v_i)$ rispetto alla nuova base di $\mathbb{C}^3$.

$$f(v_1) = f(1,i) = (1+i, 0, i) = (1+i)w_1 + 0w_2 - w_3$$
$$f(v_2) = f(1,0) = (1,1,0) = w_1 + iw_2 - w_3$$

$$M(f)_{B_2,B_3} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & i \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Parte terza, calcolo di $A_2$. Per definizione $A_2 = M(Id)_{B_2,can}$ che è tautologicamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Parte quarta, calcolo di $A_3$. Per definizione $A_3 = M(Id)_{can,B_3} = (M(Id)_{B_3,can})^{-1}$ quindi

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parte quinta, verifica:

$$M(f)_{B_2,B_3} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

**Esercizio 2.3.** *Sia* $Q = \{f \in L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ *tale che* $f(1, i, 0) \in Span \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\}$.

*Verificare che* $Q$ *è un sottospazio vettoriale di* $L(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ *e calcolarne la dimensione.*

Soluzione Prendiamo il vettore $v_1 = (i, i)$ che compare nella definizione di $Q$ ed estendiamolo a base di $\mathbb{C}^2$. Basta aggiungere il primo vettore della base canonica. Lavoriamo quindi nella base $B$ di $\mathbb{C}^2$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo adesso il vettore $w_1 = (1, i, 0)$ che compare nella definizione di $Q$ ed estendiamolo a base di $\mathbb{C}^3$ basta aggiungere ad uno ad uno i vettori della base canonica, controllando di avere sempre un sistema di vettori linearmente indipendenti. $(1, i, 0)$ e $(1, 0, 0)$ sono lin. indip. tra loro. Ok, procediamo con il secondo vettore di base. $(1, i, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ non sono indipendenti tra loro. Butto via il vettore appena aggiunto e ripeto il procedimento. $(1, i, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ sono indipendenti tra loro, ergo sono una base di $\mathbb{C}^3$. Lavoriamo quindi nella base $B'$ di $\mathbb{C}^3$ formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia ora $f \in Q$. La matrice associata a $f$ nelle basi $B, B'$ deve essere di questo tipo

$$\begin{pmatrix} \lambda & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$$

perché si è imposto $f(v_i) = \lambda w_1$ e sugli altri vettori di base non ci sono condizioni. Quindi $\mu_{B',B}(Q)$ è l'insieme delle matrici che hanno $a_{2,1} = 0$, che è un sottospazio vettoriale di dimensione 5 di $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

**Esercizio 2.4.** *Sia*

$$Q = \{f \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3) \ \textit{ tale che } f(i, i) \in Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \textit{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \ker(f)\}$$

*Verificare che $Q$ è un sottospazio vettoriale di $L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$ e calcolarne la dimensione.*

Soluzione. Sia $B$ la base di $\mathbb{C}^2$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

(verificare che è una base)

e sia $B'$ la base di $\mathbb{C}^3$ formata dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(verificare che è una base)

se $f \in Q$ allora $f(v_1) = \alpha w_1 + \beta w_2$ e $f(v_2) = 0$ per definizione di $Q$. Quindi la matrice associata a $f$ è

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ossia $\mu_{B,B'}(Q)$ è lo spazio delle matrici $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ tali che

$$\begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$$

che è un sottospazio di $M_{3\times 2}(\mathbb{C})$ di dimensione 2. $\square$