Esercizi su lineare indipendenza e generatori

Per tutto il seguito, se non specificato esplicitamente $\mathbb{K}$ indicherà un campo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

1. Cose da ricordare

Definizione 1.1. *Dei vettori* $v_1, \ldots, v_k \in V$ *si dicono* **linearmente indipendenti** *tra loro se*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_i = 0 \ \forall i$$

in altre parole se l'unica combinazione lineare dei v_i *che fornisce il vettore nullo è quella banale. Si dicono* **linearmente dipendenti** *se non sono linearmente indipendenti, ossia se esiste una combinazione lineare dei* v_i *a coefficienti* **non tutti nulli** *che dia il vettore nullo.*

Fatto 1.2. $v_1, \ldots, v_k$ *sono linearmente dipendenti tra loro se e solo se ne esiste uno tra loro che sia combinazione lineare degli altri.*

Definizione 1.3. *Un insieme di vettori* $\{v_i\}_{i \in I}$ *si dice* **insieme di generatori** *di* V*, o equivalentemente si dice che i* v_i **generano** V*, se ogni vettore di* V *si scrive come combinazione lineare dei* v_i*.*

Definizione 1.4. *Un insieme di vettori* $\{v_i\}_{i \in I}$ *si dice* **base** *di* V *se i* v_i *generano* V *e sono linearmente indipendenti tra loro.*

Teorema 1.5. *Ogni* V *ammette una base. Due basi* B *e* B' *di* V *hanno sempre la stessa cardinalità (numero di elementi).*

Definizione 1.6. V *si dice* **di dimensione finita** *se ammette una base* B *con un numero finito di elementi, tale numero si dice* **dimensione di V**.

Teorema 1.7. *Dato un insieme* A *di generatori di* V *si può sempre trovare un sottoinsieme di* A *(eventualmente* A *stesso) che sia una base.*

Corollario 1.8. *Se* $v_1, \ldots, v_k$ *generano* V *allora* $\dim(V) \leq k$*.*

Corollario 1.9. *Se* $\dim(V) = n$ *e* $v_1, \ldots, v_k$ *sono vettori di* V *con* $k < n$ *allora non possono generare* V*.*

Teorema 1.10. *Dato un insieme* A *di vettori linearmente indipendenti si può sempre trovare una base di* V *che contenga* A *(eventualmente* A *stesso).*

Corollario 1.11. *Se* $v_1, \ldots, v_k$ *sono vettori linearmente indipendenti di* V *allora* $\dim(V) \geq k$*.*

Corollario 1.12. *Se* $\dim(V) = n$ *e* $v_1, \dots, v_k$ *sono vettori di* V *con* $k > n$ *allora non possono essere linearmente indipendenti.*

Corollario 1.13 (importante)**.** *Se* $\dim(V) = n$ *allora* $v_1, \dots, v_n \in V$ *generano se e solo se sono linearmente indipendenti tra loro se e solo se formano una base di* V*.*

Teorema 1.14. $\{v_1, \dots, v_k\}$ *è una base di* V *se e solo se ogni vettore di* V *si scrive in modo unico come combinazione lineare dei* v_i*.*

2. Esercizi svolti ed esempi

Esempio 2.1. *Se* $v_1, \dots, v_k$ *sono dei vettori di* $\mathbb{K}^n$ *la combinazione lineare dei* v_i *con coefficienti* λ_i *si puó scrivere formando la matrice* $A \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$ *le cui colonne sono i vettori* v_i *e poi facendo* AX *ove* $X = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix}$*. Infatti, se i vettori* v_i *sono dati da* $v_i = \begin{pmatrix}a^i_1\\ a^i_2\\ \vdots\\ a^i_n\end{pmatrix}$*, allora*

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \dots & a^k_1\\ a^1_2 & a^2_2 & \dots & a^k_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^1_n & a^2_n & \dots & a^k_n \end{pmatrix}$$

ed abbiamo

$$AX = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \dots & a^k_1\\ a^1_2 & a^2_2 & \dots & a^k_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^1_n & a^2_n & \dots & a^k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a^1_1 + \lambda_2 a^2_1 + \dots + \lambda_k a^k_1\\ \lambda_1 a^1_2 + \lambda_2 a^2_2 + \dots + \lambda_k a^k_2\\ \vdots\\ \lambda_1 a^1_n + \lambda_2 a^2_n + \dots + \lambda_k a^k_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$$

Esempio 2.2. *Lo spazio* $\mathbb{K}_{\leq n}[x]$ *dei polinomi in* x *a coefficienti in* $\mathbb{K}$ *e di grado minore o uguale a* n*, ha dimensione* $n+1$*. Una base, detta* Base Canonica *è formata dai polinomi* $1, x, x^2, \dots, x^n$*.*

Esempio 2.3. *Lo spazio* $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *delle matrici* $m \times n$ *a coefficienti in* $\mathbb{K}$ *ha dimensione su* $\mathbb{K}$ mn *e una base, detta base canonica, è formata dalle matrici* E_{ij} *le cui entrate sono tutte nulle tranne quella di posto* i, j*, che vale* 1*.*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \textit{etc}\dots$$

Esempio 2.4. *$V = \mathbb{K}^n$ ha dimensione n su $\mathbb{K}$. La sua base canonica è data dai vettori e_i che hanno 1 al posto i e zero altrove:*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.5. *In $\mathbb{R}^4$ siano $v_1 = (1,2,1,2), v_2 = (0,0,1,1), v_3 = (1,1,1,1), v_4 = (0,0,0,1), v_5 = (1,2,3,4)$.*

(1) *Si dica se v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti.*
(2) *Si dica se v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti.*
(3) *Si dica se v_1, v_2, v_4, v_5 sono linearmente indipendenti.*
(4) *Si dica se i vettori v_1, v_2, v_3, v_5 generano $\mathbb{R}^4$.*

Soluzione.

(1) I vettori $v_1, \dots, v_5$ non possono essere linearmente indipendenti perché sono 5 vettori in uno spazio di dimensione 4.
(2) Scriviamo i v_i come vettori colonna e formiamo la matrice A le cui colonne sono v_1, v_2, v_3, v_4. I vettori $v_1, \dots, v_4$ sono lin. ind. se e solo se il sistema
$$AX = 0$$
ha un'unica soluzione (quella nulla). Il determinante di A è diverso da zero dunque A è invertibile e tale sistema ha soluzione unica, quindi la risposta è SI.
(3) Facciamo lo stesso ragionamento del punto (2) ma questa volta vediamo che la matrice A ha rango 3 e quindi la soluzione di $AX = 0$ non è unica (c'è un parametro libero).
(4) Facciamo lo stesso ragionamento del punto (2) ma questa volta ci chiediamo se ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ si scrive come combinazione lineare dei v_i, ossia se il sistema
$$AX = v$$
ha soluzione per qualsiasi scelta di $v \in \mathbb{R}^4$. Ció è vero se e solo se il rango di A è uguale al rango di $(A|v)$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$. Ma la matrice A si vede avere rango 3 (per esempio col metodo dei minori orlati). Se adesso poniamo $v = v_4$ dal punto (2) segue che il rango di $A|v$ è quattro. In altre parole v_4 non si esprime come combinazione lineare degli altri v_i, quindi v_1, v_2, v_3, v_5 non generano $\mathbb{R}^4$.

$\square$

Esercizio 2.6. *Si dica se i vettori* $1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^4$ *formano una base di* $\mathbb{C}_{\leq 4}[x]$.

SOLUZIONE $\mathbb{C}_{\leq 4}[x]$ ha dimensione 5 quindi un'insieme di 4 vettori non può esserne una base. Ma vediamolo con le mani. Il polinomio x^3 non si esprime come combinazione lineare dei polinomi dati. Infatti se cerchiamo λ_i tali che $\lambda_1 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+x)^2 + \lambda_4(1+x)^4 = x^3$
otteniamo

$$x^3 = \lambda_1 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(1+x)^2 + \lambda_4(1+x)^4 =$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + x(\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4) + x^2(\lambda_3 + 6\lambda_4) + 4\lambda_4 x^3 + \lambda_4 x^4$$

eguagliando termine a termine si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \\ 4\lambda_4 = 1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

che non è risolubile in quanto le ultime due equazioni sono contraddittorie (o se volete per Rouché-Capelli).

□

Esercizio 2.7. *Si dica se* $A = \{\sin(kx) : \ k \in \mathbb{Z}\}$ *sia un insieme di generatori dello spazio* $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *(lo spazio delle funzioni da* $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$*).*

SOLUZIONE: Non lo è. Infatti se lo fosse, la funzione costante $f(x) = 1$ sarebbe combinazione lineare di elementi di A. Ma ogni elemento di A si annulla in zero quindi ogni loro combinazione lineare si annulla in zero, mentre f non si annulla in zero. □

Esercizio 2.8. *Si dimostri che se* $w_1, \ldots, w_n$ *generano* V *e se ognuno dei* w_j *si scrive come combinazione lineare di* $v_1, \ldots, v_k$ *allora i* v_i *generano* V.

Dimostrazione. Si deve dimostrare che ogni vettore $v \in V$ è combinazione lineare dei v_i. Sappiamo che i w_i generano, dunque esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j$$

Per ipotesi esistono anche a_i^j tali che

$$w_j = \sum_{i=1}^{k} a_i^j v_i$$

da cui

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j = v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{k} a_i^j v_i = \sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_i^j) v_i$$

ponendo $b_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_i^j$ si ha la tesi. □

Esercizio 2.9. *Si dica se i vettori* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *generano* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Soluzione. Usiamo l'esercizio precedente.

$$\frac{v_2 + v3 + v_4 - v_5}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{v_2 + v3 - v_4 + v_5}{8} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{v_2 - v3 + v_4 + v_5}{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{-v_2 + v3 + v_4 + v_5}{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque i v_i generano.

Esercizio 2.10. *Si dimostri il Teorema 1.14.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sia una base di V. Allora ogni vettore è combinazione lineare dei v_i (i vettori di una base generano). Se esistesse un vettore v tale che si scriva come combinazione dei v_i in due modi diversi $v = \sum a_i v_i$ e $\sum b_i v_i$ allora avremmo

$$0 = v - v = \sum_i (a_i - b_i) v_i$$

ma essendo i v_i linearmente indipendenti (sono una base) allora $a_i - b_i = 0 \forall i$ dunque $a_i = b_i$ e i due modi di scrivere v come combinazione dei v_i coincidono.

Viceversa, supponiamo che ogni v si scrive in modo unico come combinazione dei v_i. Intanto, siccome ogni v è combinazione dei v_i, essi generano. In oltre per ipotesi anche il vettore nullo si scrive in modo unico come combinazione dei v_i, siccome il vettore nullo è sempre combinazione banale dei v_i se ne deduce che l'unica combinazione lineare dei v_i che fornisce il vettore nullo è quella banale. Dunque i v_i oltre a generare sono anche linearmente indipendenti, ergo formano una base.

Esercizio 2.11. *Dimostrare che: La dimensione di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è 1; la dimensione su $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è 2; $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ ha dimensione infinita.*

Dimostrazione. Il vettore $1 \in \mathbb{C}$ è una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Infatti $\lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ (lineare indipendenza) e per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha $z = z \cdot 1$ (genera). Se invece consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ allora una base è data dai vettori $v_1 = 1$ e $v_2 = i$. Infatti ogni $z \in \mathbb{C}$ si scrive in modo unico come $x \cdot 1 + y \cdot i$ con $x, y \in \mathbb{R}$. L'ultima affermazione è piú delicata e si basa sul fatto che $\mathbb{Q}$ è numerabile mentre $\mathbb{C}$ non lo è. Se $\mathbb{C}$ avesse dimensione finita su $\mathbb{Q}$ allora sarebbe unione numerabile di insiemi numerabili e dunque numerabile. □

Esercizio 2.12. *Si provi che $V = \mathbb{K}[x]$ ha dimensione infinita su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Consideriamo i vettori $v_k = x^k \in \mathbb{K}[x]$ al variare di $k \in \mathbb{N}$. Per ogni n i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti in quanto un polinomio $\sum_i a_i x^i$ è nullo se e solo se tutti gli a_i sono nulli. Ne segue che $\dim(V) > n$ per ogni n e quindi V ha dimensione infinita.

Esercizio 2.13. *Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si dimostri che l'insieme V degli elementi X di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano $AX = 0$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e se ne calcoli la dimensione esibendone una base. Esibire una base diversa dalla precedente.*

Soluzione Affinché V sia uno spazio vettoriale bisogna che ci sia un'operazione di somma interna tale che V sia un gruppo abeliano rispetto a tale operazione. La somma di $\mathbb{R}^4$ induce una somma in V infatti presi $X_1, X_2 \in V$ si ha

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$$

e dunque anche $X_1 + X_2$ sta in V. Discorso analogo vale per la moltiplicazione per scalare. Riguardo alle proprietà associative, distributive e la moltiplicazione per 1, esse valgono su V perché V è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ e tali proprietà valgono in $\mathbb{R}^4$.

Risolvendo il sistema come sappiamo troviamo che le soluzioni si esprimono in modo unico come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da cui segue che i vettori $v_1 = (-1, 0, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 0, 1)$ sono una base di V che quindi ha dimensione 2.

Un'altra base è data dai vettori $w_1 = v_1 - v_2$ e $w_2 = v_1 + v_2$. Infatti combinando w_1 e w_2 si ottengono facilmente v_1 e v_2. Dunque w_1, w_2 generano V. Siccome V ha dimensione 2, $\{w_1, w_2\}$ è una base di V.

Esercizio 2.14. *Si dica se i seguenti vettori generano $\mathbb{C}^3$ e in caso affermativo se ne estragga una base di $\mathbb{C}$ (come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$).*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \\ i \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \end{pmatrix}.$$

Soluzione Formiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-i & 1 & i \\ 1 & i & 0 & 2-i & i \\ i & i & 1+i & i & i \end{pmatrix}$$

e ci chiediamo se il sistema $AX = b$ ha soluzione per qualsiasi scelta di b. Ció è equivalente a chiedere che il rango di A sia uguale al numero di righe e cioè 3. Il minore identificato dalle colonne numero $1, 2, 5$ è non nullo (provare per credere) e dunque il rango di A è 3 come richiesto. Quindi i v_i generano.

In oltre, il fatto che il minore delle colonne $1, 2, 5$ sia non nullo ci dice anche che i vettori v_1, v_2, v_5 sono linearmente indipendenti (perché?) e quindi formano una base di $\mathbb{C}^3$ (perché?).

Se invece vogliamo applicare pedissequamente l'algoritmo, consideriamo una soluzione non nulla del sistema $AX = 0$, per esempio $(i, -1, 1, 0, 0)$ (come l'ho trovata?). Ne segue che v_3 è combinazione lineare degli altri. Lo buttiamo via e ripetiamo l'algoritmo con i vettori rimanenti v_1, v_2, v_4, v_5. Formiamo la matrice che ha tali vettori come colonne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & i \\ 1 & i & 2-i & i \\ i & i & i & i \end{pmatrix}$$

e cerchiamo una soluzione non nulla di $AX = 0$, per esempio $(2, -1, -1, 0)$ (come l'ho trovata?). Ne segue che v_4 è combinazione lineare degli altri. Lo butto via.

Adesso siamo rimasti con i vettori v_1, v_2, v_5 che sono linearmente indipendenti perchè il determinante di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & i & i \\ i & i & i \end{pmatrix}$$

è diverso da zero e quindi formano una base di $\mathbb{C}^3$.

Esercizio 2.15. *Si dica se i seguenti elementi di* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *sono linearmente indipendenti tra loro e in caso affermativo si estendano a base di* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Dopo questo esercizio apprezzerete l'uso delle coordinate, che faremo nella prossima lezione. Dobbiamo capire se il sistema $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ ha una soluzione non banale (linearmente dipendenti) oppure no (linearmente indipendenti). Impostiamo il calcolo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} \lambda_2 + 3\lambda_3 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ diventa il sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che è equivalente a

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che si vede subito che ha determinante diverso da zero (sviluppo secondo la prima colonna) e quindi è invertibile. Ne segue che l'unica soluzione è quella nulla e dunque i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti tra loro.

Procediamo adesso al completamento a base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Si devono aggiungere uno ad uno i vettori di una base nota, controllare che l'insieme di vettori rimanga linearmente indipendente — altrimenti si scarta il vettore appena aggiunto — e procedere sino a che non si arrivi ad un numero di vettori pari alla dimensione dello spazio in questione, in questo caso 4.

Consideriamo la base canonica di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e proviamo ad aggiungere il primo vettore ai nostri v_1, v_2, v_3.

Impostiamo il sistema $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 E_{11} = 0$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 E_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 E_{11} = 0$ diventa il sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Che essendo un sistema di tre equazioni in 4 incognite non puó avere soluzione unica. Quindi v_1, v_2, v_3, E_{11} sono linearmente indipendenti tra loro. Procediamo quindi eliminando E_{11} e testando E_{21}

Impostiamo il sistema $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 E_{21} = 0$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 E_{21} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + 3\lambda_3 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 E_{21} = 0$ diventa il sistema

$$\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

che ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante non nullo. Quindi il sistema ha come unica soluzione quella banale.

Ne segue che v_1, v_2, v_3, E_{21} sono linearmente indipendenti tra loro e siccome sono $4 = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$, sono una base di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. $\square$