Appunti sulle lezioni del 7 e 11 novembre 2013
(autospazi generalizzati e forma di Jordan)

1. Notazioni

Per tutto il seguito, se non specificato esplicitamente $\mathbb{K}$ indicherà un campo, V, W, U spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ (di dimensione finita) e f un endomorfismo di V.

Definizione 1.1. *$\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ se lo è per l'endomorfismo di $\mathbb{K}^n$ definito da $f(X) = AX$. $v \in \mathbb{K}^n$ è autovettore per A se lo è per f. Il polinomio caratteristico di A è $p(x) = \det(A - xI)$. Per $\ker(A)$ e $\operatorname{Im}(A)$ si intende $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$.*

Definizione 1.2. *La scrittura $W \leq V$ significherà: "W è sottospazio vettoriale di V.*

2. Polinomi di endomorfismi e di matrici

Definizione 2.1. $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$.

Definizione 2.2. *Dato $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$, per ogni $f \in End(V)$ si definisce $p(f) \in End(V)$ come*

$$p(f) = a_0I + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_nf^n.$$

Per ogni $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si definisce $p(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ come

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n.$$

Lemma 2.3. *Sia $p(x) \in \mathbb{K}[x], f \in End(V)$ e sia B una base di V. Si ha:*

$$M_B(p(f)) = p(M_B(f))$$

Dimostrazione. Deriva dal fatto che l'applicazione $End(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$ (ove $n = \dim(v)$) è lineare e dal fatto che la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle matrici associate alle applicazioni in questione. □

Lemma 2.4. *Siano $p, q \in \mathbb{K}[x]$ e sia $f \in End(V)$. Allora $p(f)$ e $q(f)$ commutano tra loro. Ossia*

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$$

ossia per ogni $v \in V$

$$p(f)(q(f)(v)) = q(f)(p(f)(v))$$

Dimostrazione. Segue dal fatto che f commuta con le sue potenze e con i multipli dell'identità. □

Corollario 2.5. *Siano* $p \in \mathbb{K}[x]$ *e* $f \in End(V)$. *Se* $p(x) = q(x)r(x)$ *allora*

$$p(f) = q(f) \circ r(f) = r(f) \circ q(f)$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che i polinomi in f commutano tra loro. □

Esempio 2.6. $f^2 - I = (f - I) \circ (f + I) = (f + I) \circ (f - I)$.

Infatti $(f - I)((f + I)(v)) = (f - I)(f(v) + v) = f^2(v) - f(v) + f(v) - v = f^2(v) - v$. □

Attenzione, ció non vale se ci sono in circolazione due endomorfismi differenti che non commutano tra loro.

Esempio 2.7. *Siano* $f, g \in End(V)$ *tali che* $f \circ g \neq g \circ f$ *allora* $f^2 - g^2 \neq (f + g) \circ (f - g)$.

Infatti $(f - g)((f + g)(v)) = (f - g)(f(v) + g(v)) = f^2(v) + f(g(v)) - g(f(v)) - g^2(v) \neq f^2(v) - g^2(v)$ se $f(g(v)) \neq g(f(v))$. □

La stessa cosa vale per le matrici:

Lemma 2.8. *Siano* $p, q \in \mathbb{K}[x]$ *e sia* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Allora* $p(A)$ *e* $q(A)$ *commutano tra loro. Ossia*

$$p(A)q(A) = q(A)p(A).$$

Corollario 2.9. *Siano* $p \in \mathbb{K}[x]$ *e* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Se* $p(x) = q(x)r(x)$ *allora*

$$p(A) = q(A)r(A) = r(A)q(A)$$

3. Sottospazi invarianti e restrizioni di applicazioni lineari

Definizione 3.1. *Sia* $f \in End(V)$. *Un sotto spazio vettoriale* W *di* V *si dice* f*-invariante (o invariante per* f *o piú semplicemente invariante) se*

$$f(W) \subseteq W$$

cioè se per ogni $w \in W$ *si ha* $f(w) \in W$.

Esempio 3.2. $W = 0$ *è invariante per ogni* f. $W = V$ *è invariante per ogni* f.

Esercizio 3.3. *Dimostrare che gli unici sottospazi invarianti per ogni endomorfismo sono* 0 *e* V.

Esempio 3.4. *Ogni autospazio* V_λ *è* f*-invariante.*

Definizione 3.5. *Sia* $f \in \hom(V, W)$ *e sia* $U \leq V$ *la restrizione di* f *agli elementi di* U *si indica con* $f|_U$ *ed è un elemento di* $\hom(U, W)$

Esercizio 3.6. *Siano* $U \leq V$ *e* W *spazi vettoriali. Dimostrare che* $\cdot|_U : \hom(V, W) \to \hom(U, W)$ *è lineare e se ne scriva la matrice associata in due basi a scelta di* $\hom(V, W)$ *e* $\hom(U, W)$

Nel caso particolare di $W \leq V$ che sia f-invariante si ha

$$f|_W \in End(W)$$

In termini di matrici, se $f \in End(V)$ e $W \leq V$ è f-invariante allora scelta

$$B_w = w_1, \dots, w_k$$

base di W ed estesa a

$$B_v = w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

base di V. La matrice associata a f nella base B_v ha una forma particolarmente semplice:

$$M_{B_v}(f) \begin{pmatrix} M_{B_W}(f|_W) & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

ove $M_{B_w}(f|_W)$ è una matrice quadrata $k \times k$, A_2 è $(n-k) \times (n-k)$, mentre A_1 non è quadrata in generale essendo $k \times (n-k)$ ed infine lo 0 in basso a sinistra rappresenta la matrice nulla $(n-k) \times k$.

Poniamo $U =$span$(v_{k+1}, \dots, v_n)$. Chiaramente una base di U è $B_U = (v_{k+1}, \dots, v_n)$ e si ha $V = W \oplus U$. In oltre

$$M_{B_U}(f|_U) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

A_1 rappresenta la componente di f lungo W e A_2 quella lungo U. Cioè, se $\varphi_1 \in \hom(U, W)$ è l'applicazione lineare da U a W associata a A_1 e $\varphi_2 \in \hom(U, U)$ è quella associata ad A_2, allora per ogni $u \in U$ si ha

$$f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$$

con $\varphi_i(u) \in W$ e $\varphi_2(u) \in U$.

In particolare, se $V = W \oplus U$ ed entrambi W ed U sono f-invarianti allora $A_1 = 0$ e

$$M_{B_v}(f) \begin{pmatrix} M_{B_W}(f|_W) & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Una tale matrice si chiama diagonale a blocchi. In generale una matrice si dice diagonale a blocchi se sulla diagonale ha delle sottomatrici quadrate e zero altrove. Una matrice si dice triangolare a blocchi se sulla diagonale ha delle sottomatrici quadrate e sotto tali "blocchi" ha solo zeri.

4. Nuclei di potenze di endomorfismi

Sia $L \in End(V)$.

Lemma 4.1. *Si ha*

$$\ker(L) \leq \ker(L^2) \leq \ker(L^3) \leq \ker(L^4) \leq \dots$$

Dimostrazione. Sia $v \in \ker(L^k)$. Allora $L^k(v) = 0$ quindi

$$L^{k+1}(v) = L(L^k(v)) = L(0) = 0.$$

$\square$

Puó succedere che non siano tutti uguali

Esempio 4.2. *Sia L l'endomorfismo associato alla matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Allora* $\ker(L) \neq \ker(L^2) = \mathbb{K}^2$.

Lemma 4.3. *Se* $\ker(L^{k+1}) = \ker(L^k)$ *allora* $\ker(L^{k+2}) = \ker(L^{k+1})$.

Dimostrazione. $\ker(L^{k+2}) \supset \ker(L^{k+1})$ per il lemma precedente, rimane da dimostrare $\ker(L^{k+2}) \subset \ker(L^{k+1})$.

Sia $v \in \ker(L^{k+2})$. Allora $0 = L^{k+2}(v) = L^{k+1}(L(v))$, quindi $L(v) \in \ker(L^{k+1})$. Siccome per ipotesi $\ker(L^{k+1}) = \ker(L^k)$ si ha $L(v) \in \ker(L^k)$ quindi $L^k(L(v)) = 0$ ma dunque $L^{k+1}(v) = 0$, ergo $v \in \ker(L^{k+1})$. $\square$

Corollario 4.4. *Se V ha dimensione finita allora la successione dei* $\ker(L^k)$ *si stabilizza. Inoltre, si stabilizza esattamente al primo passo in cui si ha un'uguaglianza tra* $\ker(L^k)$ *e* $\ker(L^{k+1})$.

Dimostrazione. La seconda affermazione discente direttamente dal lemma precedente: se a un certo punto c'è uguaglianza, allora da quel punto in poi c'è sempre uguaglianza. D'altronde, se non c'è mai uguaglianza si ha che la successione $d_n = \dim(\ker(L^n))$ tende all'infinito. Siccome sono tutti sottospazi di V, ciò è possibile solo se V ha dimensione infinita. $\square$

Si noti che in particolare se $\dim(V) = n$, la successione si deve stabilizzare per forza in al piú n passi.

Esempio 4.5. *Sia L l'endomorfismo associato ad*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$\ker(L) = span(e_1) \qquad \ker(L^2) = span(e_1, e_2) \qquad \ker(L^3) = span(e_1, e_2, e_3)$

e da 3 in poi la successione si stabilizza.

5. Autospazi generalizzati

Fissiamo per tutto il seguito un'endomorfismo $f \in End(V)$.

Definizione 5.1. *L'autospazio generalizzato di $\lambda \in \mathbb{K}$ è definito come*

$$\hat{V}_\lambda = \bigcup_k \ker(f - \lambda I)^k$$

Per i lemmi precedenti $\hat{V}_\lambda$ é un ben definito sottospazio di V e coincide, nel caso che V abbia dimensione finita, col piú grosso degli spazi $\ker(f - \lambda I)^k$.

Lemma 5.2. *Se $g, h \in End(V)$ commutano tra loro allora $\ker h$ è g-invariante.*

Dimostrazione. Si deve dimostrare che se $v \in \ker h$ allora $g(v) \in \ker h$ ma ció è vero in quanto se $h(v) = 0$ e $g \circ h = h \circ g$ allora

$$0 = g(0) = g(h(v)) = h(g(v)).$$

□

Definizione 5.3. *Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo*

$$L_\lambda = f - \lambda I$$

Teorema 5.4. *Si ha:*

(1) $V_\lambda \leq \hat{V}_\lambda$.
(2) *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\ker(L_\lambda^k)$ è f-invariante.*
(3) *Per ogni $\hat{V}_\lambda$ è f-invariante.*
(4) *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mu \in \mathbb{K}$ $\ker(L_\lambda^k)$ è L_μ-invariante.*
(5) *Per ogni $\mu \in \mathbb{K}$ $\hat{V}_\lambda$ è L_μ-invariante.*

Dimostrazione. Il punto 1) segue immediatamente dalle definizioni, cosí come il punto 2) implica direttamente il punto 3) ed il punto 4) implica direttamente il punti 5). I punti 2) e 4) seguono dal precedente lemma e dal fatto che i polinomi in f commutano tra loro. □

Teorema 5.5. *Se λ e μ sono autovalori distinti di f, allora*

$$\hat{V}_\lambda \cap \hat{V}_\mu = 0$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $v \in \hat{V}_\lambda \cap \hat{V}_\mu$, $v \neq 0$. Siccome $v \in \hat{V}_\lambda$ esiste un k tale che $L_\lambda^k(v) = 0$. Sia a il piú grande degli n tali che $L_\lambda^n(v) \neq 0$. Si ha

$$L_\lambda^a(v) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad L_\lambda^{a+1}(v) = 0$$

poniamo

$$w = L_\lambda^a(v).$$

Per come è definito $w \in \ker(L_\lambda)$ e $w \neq 0$. In oltre, siccome $\hat{V}_\mu$ è L_λ-invariante, si ha

$$0 \neq w \in V_\lambda \cap \hat{V}_\mu$$

Come sopra, sia b il più grande esponente n tale che $L_\mu(w) \neq 0$ per cui

$$L_\mu^b(w) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad L_\mu^{b+1}(w) = 0$$

$$u = L_\mu^b(w).$$

Per come è definito, $u \in \ker(L_\mu)$ e $u \neq 0$. In oltre, siccome V_λ è L_μ-invariante, si ha

$$0 \neq u \in V_\mu \cap V_\lambda.$$

Assurdo. $\square$

6. Applicazioni nilpotenti e triangolabilità di endomorfismi

Definizione 6.1. *$L \in End(V)$ si dice nilpotente se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $L^n = 0$.*

Se $L(v) = \lambda v$ allora $L^k(v) = \lambda^k v$. Dunque le applicazioni nilpotenti sono applicazioni con il solo autovalore nullo. Inoltre sono tali che $\hat{V}_0 = V$.

Teorema 6.2. *Sia $L \in End(V)$ nilpotente. Allora L è triangolabile.*

Dimostrazione. Sia B_1 una base di $\ker L$. Estendiamo B_1 a una base B_2 di $\ker L^2$. Si noti che gli elementi di $B_2 \setminus B_1$ stanno in $\ker L^2$ ma non in $\ker L$. Estendiamo B_2 ad una base B_3 di $\ker L^3$ e cosí via sino ad ottenere una base B di $\hat{V}_0$. La matrice $M_B(L)$ è triangolare superiore in quanto $L(\ker(L^k)) \subset \ker(L^{k-1})$ (se v va a zero in k passi allora $L(v)$

va a zero in $k-1$ passi). In particolare essa sarà triangolare superiore a blocchi della forma

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{*} & \boxed{*} & \dots & \boxed{*} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{*} & \dots & \boxed{*} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{*} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Ove la prima colonna di "blocchi nulli" (non necessariamente quadrati, tranne il primo) corrisponde all'immagine di B_1; la seconda all'immagine di $B_2 \setminus B_1$, che è contenuta in B_1; la terza all'immagine di $B_3 \setminus B_2$, che è contenuta in B_2 et cetera... $\square$

Corollario 6.3. *Se $f \in End(V)$ allora $f|_{\hat{V}_\lambda}$ è triangolabile con polinomio caratteristico $(x-\lambda)^{\dim(\hat{V}_\lambda)}$.*

Dimostrazione. Sia $L = (f - \lambda I)|_{\hat{V}_\lambda} \in End(\hat{V}_\lambda)$. L è nilpotente per definizione di $\hat{V}_\lambda$. Quindi esiste una base in cui la matrice associata a L è triangolare superiore con tutti zeri sulla diagonale principale. Ne segue che a $f|_{\hat{V}_\lambda} = L + \lambda I$ è associata, nella stessa base, una matrice triangolare superiore con tutti λ sulla diagonale principale. $\square$

Corollario 6.4. *Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di $f \in End(V)$. Se*

$$V = \hat{V}_{\lambda_1} \oplus \hat{V}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \hat{V}_{\lambda_k}$$

allora f è triangolabile.

Dimostrazione. Siccome gli autospazi generalizzati sono in somma diretta, la matrice associata a f in un'opportuna base è diagonale a blocchi e ragionando su ogni $\hat{V}_{\lambda_i}$ separatamente, la tesi segue dal corollario precedente. $\square$

Teorema 6.5. *Sia $f \in End(V)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha*

$$\dim(\hat{V}_\lambda) = m_a(\lambda)$$

ove m_a indica la molteplicità algebrica di λ come radice del polinomio caratteristico di f.

Dimostrazione. Poniamo $k = \dim(\hat{V}_\lambda)$. Sia $v_1, \dots, v_k$ una base di $\hat{V}_\lambda$ tale che la matrice associata a $f|_{\hat{V}_\lambda}$ sia triangolare superiore con soli λ sulla diagonale. Sia $B = v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ una base di V. Sia $W = span(w_{k-1}, \dots, w_n)$. Chiaramente $V = \hat{V}_\lambda \oplus W$. La matrice di associata a f nella base B sarà quindi a blocchi della forma

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{|cccc|} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & \lambda & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} & A_1 \\ \hline & \\ 0 & A_2 \\ & \end{array}\right)$$

Ove A_2 è quadrata di ordine $n-k$. Per ogni $w \in W$ si ha quindi $f(w) = f_1(w) + f_2(w)$ ove $f_1(w) \in \hat{V}_\lambda$ è la componente di $f(w)$ lungo $\hat{V}_\lambda$ e $f_2(w) \in W$ è quella lungo W. Nella basi scelte, f_1 è rappresentata da A_1 e f_2 è rappresentata da A_2.

Per come è fatta $M_B(f)$, il polinomio caratteristico di f è

$$p_f(x) = (\lambda - x)^k p_{A_2}(x)$$

quindi $\dim(\hat{V}_\lambda) = k \leq m_a(\lambda)$. D'altronde se per assurdo si avesse $p_{A_2}(\lambda) = 0$ allora $f_2 = f|_W$ avrebbe un autovettore relativo a λ. Cioè esisterebbe $0 \neq w \in W$ tale che $f_2(w) = \lambda(w)$ da cui

$$f(w) = f_1(w) + \lambda(w)$$

quindi $(f - \lambda I)(w) = f_1(w) \in \hat{V}_\lambda$ e dunque esiste m tale che $(f - \lambda I)^m(f_1(w)) = 0$; ma allora $(f-\lambda I)^{m+1}(w) = 0$ e dunque $w \in \hat{V}_\lambda$. Ma $w \in W$, quindi avremmo

$$0 \neq w \in W \cap \hat{V}_\lambda$$

il ché è assurdo perché W e $\hat{V}_\lambda$ sono in somma diretta.

Ne segue che $k = m_a(\lambda)$. $\square$

A lezione abbiamo già visto che se f è triangolabile allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è esattamente la dimensione di V. Il seguente corollario fornisce, tra le altre cose, il viceversa.

Corollario 6.6. *Sia $f \in End(V)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *f è triangolabile.*
(2) $V = \hat{V}_{\lambda_1} \oplus \hat{V}_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus \hat{V}_{\lambda_k}$.
(3) $\sum_i \dim(\hat{V}_{\lambda_i}) = \dim(V)$
(4) $\sum_i m_a(\lambda_i) = \dim(V)$.

Dimostrazione. Il teorema precedente fornisce 3) $\Leftrightarrow$ 4), mentre il corollario precedente fornisce 2) $\Rightarrow$ 1). Visto che gli autospazi generalizzati sono sempre in somma diretta, 2) $\Leftrightarrow$ 3) è immediata. 1) $\Rightarrow$ 4) lo abbiamo visto a lezione (per chi non c'era: è un facile esercizio). $\square$

7. Forma di Jordan

Definizione 7.1. *Un blocco di Jordan di ordine n, relativo a λ, è una matrice quadrata $n \times n$ che ha λ sulla diagonale principale, 1 immediatamente sopra e 0 altrove:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Definizione 7.2. *Una matrice si dice di Jordan se è diagonale a blocchi con blocchi di Jordan sulla diagonale.*

Esempio 7.3. *Sono matrici di Jordan:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 7.4. *NON sono matrici di Jordan:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 7.5. *Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Allora esiste una base di B, detta base di Jordan, tale che $M_B(f)$ sia una matrice di Jordan. Viceversa, se f ha una base di Jordan allora è triangolabile.*

Dimostrazione. (Questa dimostrazione non è nel programma d'esame.) Tipicamente questa dimostrazione si fa per induzione, ma visto che il principio di induzione non lo abbiamo fatto in classe, ne faremo a meno.

Siccome la matrice associata a una base di Jordan è triangolare superiore, se f ammette una base di Jordan allora è triangolabile.

Viceversa, supponiamo f triangolabile. Allora V è somma diretta degli autospazi generalizzati relativi agli autovalori di f. Quindi possiamo lavorare su tali autospazi separatamente ed è quindi sufficiente dimostrare il teorema per una applicazione con un solo autovalore λ. Supponiamo dunque che f sia triangolabile e abbia un solo autovalore λ e poniamo

$$L = f - \lambda I.$$

L è nilpotente, cioè esiste n tale che $L^n = 0$. Sia k il più piccolo esponente tale che $L^k = 0$. Sia B_1 una base di $\ker L$; B_2 una base di $\ker L^2$ ottenuta estendendo B_1; B_3 una base di $\ker B_2$ ottenuta estendendo B_2; et cetera sino ad ottenere una base B_k di $V = \ker L^k$.

Siano $v_1, \dots, v_{n_k}$ i vettori aggiunti a B_{k-1} per ottenere B_k; siamo sicuri che ce n'è almeno uno perché $\ker L^{k-1} \neq V$ (per come è definito k). Consideriamo

$$w_1 = L^{k-1}(v_1), w_2 = L^{k-2}(v_1), \dots, w_{k-1} = L(v_1), w_k = v_1$$

Per come sono definiti, $w_i \in \ker L^i \setminus \ker L^{i-1}$ e lo spazio generato dai w_i è L-invariante. Inoltre è immediato verificare che la matrice di L nella base data dai w_i è un blocco di Jordan di ordine k relativo a zero.

Consideriamo adesso i vettori $L^s(v_i)$ e li chiamiamo

$$\begin{array}{cccc}
w_1 = L^{k-1}(v_1) & w_{k+1} = L^{k-1}(v_2) & \dots & w_{(k-1)n_k+1} = L^{k-1}(v_{n_k}) \\
w_2 = L^{k-2}(v_1) & w_{k+2} = L^{k-2}(v_2) & \dots & w_{(k-1)n_k+2} = L^{k-2}(v_{n_k}) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
w_{k-1} = L(v_1) & w_{2k-1} = L(v_2) & \dots & w_{kn_k-1} = L(v_{n_k}) \\
w_k = v_1 & w_{2k} = v_2 & \dots & w_{kn_k} = v_{n_k}
\end{array}$$

I vettori w_i (che sono kn_k in numero) sono linearmente indipendenti per come sono definiti e la matrice di L ristretta allo span di tali vettori è fatta di n_k blocchi di ordine k (relativi a zero).

Purtroppo peró, in generale $W = span(w_1, w_2, \dots, w_{kn_k})$ non è tutto V. Dobbiamo quindi ripetere il procedimento considerando $L(w_1), \dots, L(w_{kn_k})$. Di tali vettori ce ne sono n_k nulli (e sono $L(w_1), L(w_{k+1}), L(w_{2k+1}), \dots$) gli altri sono linearmente indipendenti tra loro e sono quindi una base di $L(W) \in \ker L^{k-1}$. Estendiamo tale base a base di $\ker L^{k-1}$ aggiungendo dei vettori $u_1, \dots, u_{n_{k-1}}$. Andando a considerare i vettori $L^s(u_i)$

con $i = i, \dots, n_{k-1}$ e $s = 0, \dots, k-2$ otteniamo, come sopra n_{k-1} blocchi di ordine $k-1$. Tali vettori generano uno spazio U.

Adesso ripetiamo il procedimento osservando che $span(L^2(W), L(U)) \in \ker L^{k-2}$. Troveremo n_{k-2} blocchi di ordine $k-2$, e cosí via. Troveremo per ogni $m = 1, \dots, k$, dei blocchi di ordine m che saranno in numero n_m.

Abbiamo quindi trovato una base di Jordan per L con tutti blocchi relativi a zero sulla diagonale. Ma allora $f = L + \lambda I$ avrà, nella stessa base, gli stessi blocchi ma stavolta relativi a λ. □

Teorema 7.6. *Sia $L \in End(V)$ nilpotente. I numeri n_m, ossia il numero di blocchi di ordine m, in una base di Jordan, non dipendono dalla base scelta ma solo da L.*

Dimostrazione. Sia k il minimo esponente tale che $L^k = 0$. Chiaramente k dipende solo da L. Avendo una base di Jordan a disposizione, è immediato controllare che per ogni $m = 1, \dots, k$ si ha

$$n_m + n_{m+1} + \cdots + n_k = \dim(\ker L^m) - \dim(\ker L^{m-1}).$$

Siccome di numeri $\dim(\ker L^m)$ dipendono solo da L e non dalla base di Jordan, la tesi segue. □

Corollario 7.7. *Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Per ogni autovalore λ di f siano*

$$h_m(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda I)^m) - \dim(\ker(f - \lambda I)^{m-1}).$$

Tali numeri, che dipendono solo da f, rappresentano il numero di blocchi di ordine almeno m relativi all'autovalore λ presenti in una qualsiasi base di Jordan per f.

Dimostrazione. Immediata considerando che gli autospazi generalizzati sono f-invarianti. □

Corollario 7.8. *Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Per ogni autovalore λ di f siano*

$$n_m(\lambda) = h_m(\lambda) - h_{m+1}(\lambda).$$

Tali numeri, che dipendono solo da f, rappresentano il numero di blocchi di ordine esattamente m relativi all'autovalore λ presenti in una qualsiasi base di Jordan per f.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal teorema e corollario precedenti. □

Definizione 7.9. *Una forma di Jordan per f è la matrice associata a f in una base di Jordan.*

Qui le notazioni e le convenzioni non sono uniche. Per esempio in letteratura si trova spesso la forma di Jordan fatta con le triangolari inferiori, il che è piú naturale per certi versi e meno per altri. In oltre, si parla sempre di FORMA CANONICA DI JORDAN, come a dire se ne sceglie una tra le tante. Noi faremo la scelta seguente.

Definizione 7.10. *Sia $f \in End(V)$ triangolabile e sia $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ un ordine degli autovalori di f. La forma canonica di Jordan di f (associata all'ordine scelto per i λ_i) è la forma di Jordan che ha sulla diagonale prima tutti i blocchi relativi a λ_1, ordinati dal piú piccolo al piú grande, poi quelli di λ_2 sempre ordinati dal piú piccolo al piú grande, e cosi via.*

8. Algoritmo per la forma di Jordan

Nonostante la dimostrazione dell'esistenza di una base di Jordan sia piuttosto complicata, c'è un algoritmo semplicissimo che permette di calcolare la forma di Jordan a partire dai numeri $n_m(\lambda)$.

Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Per ogni autovalore λ di f sia

$$k(\lambda) \text{ il piú piccolo esponente tale che } (f|_{\hat{V}_\lambda} - \lambda I)^k = 0.$$

Calcoliamo i numeri

$$h_m(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda I)^m) - \dim(\ker(f - \lambda I)^{m-1}).$$

Si noti che:

- $k(\lambda)$ fornisce la massima dimensione dei blocchi relativi a λ.
- $h_1(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda_I)) = \dim(V_\lambda)$ fornisce il numero di blocchi totale.
- $h_2(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda_I)^2) - \dim(\ker(f - \lambda_I))$ fornisce il numero di blocchi di ordine almeno 2.
- $h_3(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda_I)^3) - \dim(\ker(f - \lambda_I)^2)$ fornisce il numero di blocchi di ordine almeno 3.
- e cosí via...
- $h_k(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda_I)^k) - \dim(\ker(f - \lambda_I)^{k-1})$ fornisce il numero di blocchi di ordine almeno k.
- e cosí via sino a $k(\lambda)$:
- $h_{k(\lambda)}(\lambda) = \dim(\ker(f - \lambda_I)^{k(\lambda)}))$ fornisce il numero di blocchi di ordine esattamente $k(\lambda)$ (non ce ne sono di piú grossi).
- $h_i \geq h_{i+1}$.
- La somma degli h_i è $\dim \ker(f - \lambda I)^{k(\lambda)} = \dim(\hat{V}_\lambda)$.

A questo punto si forma un diagramma di quadratini fatto di tante colonne alte $h_i(\lambda)$, ordinate da sinistra a destra, tipo questo:

$$\begin{array}{cccccc}
\square & & & & & \\
\square & & & & & \\
\square & \square & & & & \\
\square & \square & & & & \\
\square & \square & \square & \square & & \\
\square & \square & \square & \square & & \\
\square & \square & \square & \square & & \\
\square & \square & \square & \square & \square & \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

In questo esempio abbiamo $h_1 = 9, h_2 = 7, h_3 = 5, h_4 = 5, h_5 = 2, h_6 = 1$. Quindi in questo esempio l'autospazio generalizzato relativo a λ avrebbe dimensione 29.

Adesso si contano quanti quadratini ci sono in ogni riga e questo ci fornisce esattamente la dimensione di tutti i blocchi nella forma di Jordan.

Nel nostro esempio avremmo

- 2 blocchi di ordine 1
- 2 blocchi di ordine 2
- nessun blocco di ordine 3
- 3 blocchi di ordine 4
- un blocco di ordine 5
- un blocco di ordine 6

Esercizio 8.1. *Perché l'algoritmo funziona?*

Suggerimento: basta usare le relazioni che ci sono tra i numeri h_m e n_m.

Esercizio 8.2. *Qual'è la forma di Jordan associata al seguente diagramma?*

$$\begin{array}{cccc}
\square & \square & \square & \square
\end{array}$$

Esercizio 8.3. *Qual'è la forma di Jordan associata al seguente diagramma?*

$$\begin{array}{c}
\square \\
\square \\
\square \\
\square
\end{array}$$

Esercizio 8.4. *Qual'è la forma di Jordan associata al seguente diagramma?*

$$\begin{array}{lll} \square & & \\ \square & \square & \square \end{array}$$

Esercizio 8.5. *Qual'è la forma di Jordan associata al seguente diagramma?*

$$\begin{array}{ll} \square & \square \\ \square & \square \end{array}$$

Esercizio 8.6. *Qual'è la forma di Jordan associata al seguente diagramma?*

$$\begin{array}{lll} \square & & \\ \square & \square & \\ \square & \square & \square \end{array}$$

9. Forma di Jordan complessa

In questa sezione ci restringiamo al caso particolare di endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ che non sono triangolabili, sfruttando il fatto che invece lo sarebbero su $\mathbb{C}^n$.

Consideriamo l'endomorfismo $f :\in End(\mathbb{R}^2)$ associato a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$p(x) = (1-x)^2 - 2$$

che non ha radici reali e dunque non è triangolabile.

D'altronde la stessa matrice definisce un endomorfismo di $\mathbb{C}^2$, che chiameremo ancora f. Su $\mathbb{C}$ si ha

$$p(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (1-x)^2 = -2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1 \pm i\sqrt{2}$$

Quindi ci sono due autovalori complessi coniugati

$$\lambda = 1 + i\sqrt{2} \qquad \bar{\lambda} = 1 - i\sqrt{2}$$

e quindi f è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Sia $v \in \mathbb{C}^2$ tale che

$$f(v) = \lambda v$$

siccome f è a coefficienti reali si ha

$$f(\bar{v}) = \overline{f(v)} = \overline{\lambda v)} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Per cui se v è autovettore relativo a λ allora $\bar{v}$ lo è per $\bar{\lambda}$.

Quindi nella base $v, \bar{v}$ la $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$$

Da questo ricaviamo una forma canonica per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ come segue.

Siano

$$w_1 = v + \bar{v} \qquad w_2 = \frac{v - \bar{v}}{i} = -i(v - \bar{v})$$

Si noti che per come sono definiti entrambi i vettori w_1 e w_2 sono reali e si verifica subito che

$$w_1, w_2 \text{ è una base di } \in \mathbb{R}^2.$$

Andiamo a calcolare la matrice di f in questa base:

$$f(w_1) = f(v+\bar{v}) = \lambda v + \bar{\lambda}\bar{v} = \Re(\lambda)(v+\bar{v}) + i\Im(\lambda)(v-\bar{v}) = \Re(\lambda)w_1 - \Im(\lambda)w_2$$

$$f(w_2) = -if(v-\bar{v}) = -i\lambda v + i\bar{\lambda}\bar{v} = -i\Re(\lambda)(v-\bar{v}) + \Im(\lambda)(v+\bar{v}) = \Re(\lambda)w_2 + \Im(\lambda)w_1$$

La matrice associata è dunque

$$\begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \\ -\Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La cosa si generalizza come segue. Per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ definiamo la matrice 2×2 reale

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \\ -\Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix}$$

ed indichiamo con I_2 la matrice identità 2×2.

Dato un blocco di Jordan $k \times k$ a coefficienti complessi

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si definisce il corrispondente Blocco di Jordan Complesso, che è una matrice $2k \times 2k$ a coefficienti reali, descritta a blocchi 2×2 da

$$\begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \Lambda & I_2 \\ 0 & & \dots & 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo reale. Allora

(1) Gli autovalori sono Reali o Complessi coniugati.

(2) La forma di Jordan su $\mathbb{C}$ è fatta di
  (a) Parte reale
  (b) Blocchi relativi ad autovalori complessi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
  (c) Blocchi relativi ai coniugati dei λ_i. Stessi blocchi.

(3) La forma canonica di f, detta di Jordan complessa, è fatta da
  (a) Parte reale uguale a prima
  (b) Blocchi di Jordan complessi corrispondenti alle coppie di autovalori complessi coniugati.

Esercizio 9.1. *Si classifichino tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^2$ tali che $f^2 = I$.*

Esercizio 9.2. *Si classifichino tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^3$ tali che $f^2 = I$.*

Esercizio 9.3. *Si classifichino tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^4$ tali che $f^2 = I$.*

Esercizio 9.4. *Si classifichino tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^2$ tali che $f^3 = I$.*

Esercizio 9.5. *Si classifichino tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^3$ tali che $f^3 = I$.*

Esercizio 9.6. *Si classifichino tutti gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^4$ tali che $f^3 = I$.*