Esercizio 3. Sia X un insieme dotato di due topologie τ, σ. Si dimostri che se per ogni $x \in X$ esiste una famiglia $\mathcal{V}_x$ di sottoinsiemi di X tale che $\mathcal{V}_x$ sia un sistema fondamentale di intorni (non necessariamente aperti) di x sia per τ che per σ, allora $\tau = \sigma$.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con la metrica degli infiniti raggi:

$$d(p,q) = \begin{cases} ||p-q|| & \text{se } p, q \text{ sono allineati con l'origine} \\ ||p|| + ||q|| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $Y = \mathbb{R}^2$ con l'ordine lessicografico. Si dica, motivando la risposta, se X e Y sono omeomorfi.

Esercizio 1. Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ definita da $f(t) = \arctan(t)e^{it}$. E sia S la spirale descritta dall'immagine di f:

$$S = f([0,\infty)) = \{\arctan(t)e^{it} :\ t \in [0,\infty)\}$$

con la topologia indotta da $\mathbb{C}$.

(1) Determinare la chiusura $\overline{S}$ di S in $\mathbb{C}$.
(2) Determinare la compattificazione di Alexandroff di S e dire se è omeomorfa a $\overline{S}$.
(3) Si dica se S è connesso.
(4) Si dica se $\overline{S}$ è connesso.
(5) Si dica se $\overline{S}$ è connesso per archi.
(6) Si dica se il complementare di S in $\mathbb{C}$ è connesso.
(7) Si dica se il complementare di S in $\mathbb{C}$ è connesso per archi.