

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^2$  sia  $X = \{x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0\} \cup \{x^2 + y^2 < 1, y < 0\}$ .

- (1) Si determini la parte interna di  $X$ .
- (2) Si determini la chiusura di  $X$ .
- (3) Si dica se  $X$  è connesso per archi.
- (4) Si dica se  $X$  è localmente compatto.
- (5) Si dica se  $\bar{X}$  è localmente compatto.
- (6) Sia  $K$  la chiusura proiettiva di  $X$  e sia  $A$  la compattificazione di Alexandroff di  $\bar{X}$ . Si dica se  $K$  e  $Y$  sono omeomorfi.
- (7) Si disegnino  $K$  e  $Y$ .

**Esercizio 2.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $A \subseteq X$ . Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- (1) (a) Se  $X$  è metrizzabile allora  $X \times X$  è metrizzabile.  
(b) Se  $X \times X$  è metrizzabile allora  $X$  è metrizzabile.
- (2) (a) Se  $X$  è metrizzabile allora  $A$  è metrizzabile.  
(b) Se  $A$  è metrizzabile allora  $X$  è metrizzabile.
- (3) (a) Se  $X/A$  è metrizzabile allora  $X$  è metrizzabile.  
(b) Se  $X$  è metrizzabile allora  $X/A$  è metrizzabile.

**Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.**