Esercizio 1. Sia $q(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$ e sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^2$ indotta da q. Sia

$$X = \{v \in \mathbb{R}^2 : b(v,v) < 0\}$$

(1) Si calcoli la segnatura di b.
(2) Si dica se X è vuoto.
(3) Si dica se X è connesso.
(4) Si determini la parte interna, la chiusura e la frontiera di X in $\mathbb{R}^2$.
(5) Sia Y la chiusura proiettiva di X. Si dica se Y è omeomorfo al disco $D^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 : \ ||v|| \leq 1\}$.
(6) Si determini la chiusura proiettiva della frontiera di X.
(7) Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e considerando $X \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \subset \mathbb{CP}^1$, sia Z la chiusura di X in $\mathbb{CP}^1$. Si esibisca un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a Z. Si dica se Z è omeomorfo a Y.

Esercizio 2. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ generata da

$$v \sim 2v$$

(1) Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è Hausdorff.
(2) Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è connesso.
(3) Si dica se $[0]$ è chiuso in $\mathbb{R}^2/\sim$.
(4) Si dica se $[0]$ è aperto in $\mathbb{R}^2/\sim$.
(5) Si determini la topologia del complementare di $[0]$ in $\mathbb{R}^2/\sim$ (è compatto? è Hausdorff? è connesso? Chi caspita è?)

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico e sia C una componente connessa di X e sia $A \subseteq X \setminus C$. Dimostrare che A è una componente connessa di $X \setminus C$ se e solo se è una componente connessa di X. Ciò rimane vero se C non è una componente connessa?