Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, sia X un insieme tale che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in X$ la palla aperta $B(x, \varepsilon)$ è contenuta in X. Dimostrare che X è connesso. Fornire due esempi di insiemi con questa proprietà.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^2$ con la metrica euclidea, siano A la palla aperta di centro $(0, 4)$ e raggio 4 e B la palla aperta di centro $(0, 1)$ e raggio 1. Sia $C = A \setminus B$.

(1) Si dica se C è aperto.
(2) Si dica se C è chiuso.
(3) Si dica se C è connesso.
(4) Si dica se C è compatto.
(5) Si dica se il complementare di C è connesso.
(6) Si dica se la parte interna del complementare di C è connessa.
(7) Si dica se C è omeomorfo a $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

Esercizio 3.
Su $\mathbb{R}$ sia τ la topologia Euclidea e sia σ la topologia generata dagli intervalli del tipo $[a, b)$.

(1) Si dica se $\tau = \sigma$;
(2) Si dica se τ è più fine di σ;
(3) Si dica se σ è più fine di τ;
(4) Si dica se $(\mathbb{R}, \sigma)$ è connesso;
(5) Si dica se $[0, 1]$ con la topologia indotta da σ è compatto.
(6) è vero che se $K \subset \mathbb{R}$ è compatto per la topologia σ allora è anche compatto per τ?

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.