Esercizio 1. Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sup(|x|, |y|) < 1\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(1) Si determinino parte interna e chiusura di X.
(2) Si dica se X è connesso.
(3) Si dica se $\bar{X}$ è connesso.
(4) Si dica se ∂X è connesso.
(5) Sia $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$; si dica se $\bar{X}$ è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff $\widehat{Y}$ di Y.

Esercizio 2. Sia X uno spazio topologico. Si dica, giustificando, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(1) Se X è connesso allora togliendo un punto rimane connesso.
(2) Se $\exists x \in X$ tale che $X \setminus \{x\}$ è connesso, allora X è connesso.
(3) Se $\forall x \in X$ si ha che $X \setminus \{x\}$ è connesso, allora X è connesso.
(4) Se $\forall x \in X$ si ha che $X \setminus \{x\}$ è connesso, allora X ha al più due componenti connesse.

Esercizio 3. Sia X uno spazio metrico compatto. Si dimostri che X è separabile. Si dimostri che X ha base numerabile.