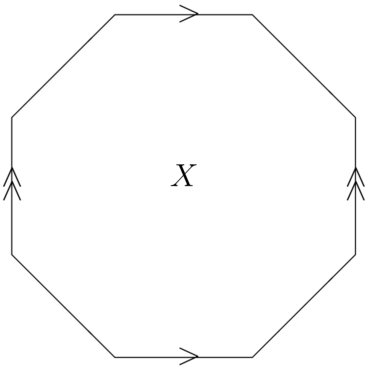
Esercizio 1. Sia $P = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a due nella variabile x, con la topologia indotta dall'identificazione di P con $\mathbb{R}^3$ (quella data $ax^2 + bx + c \leftrightarrow (a, b, c)$ per intenderci).

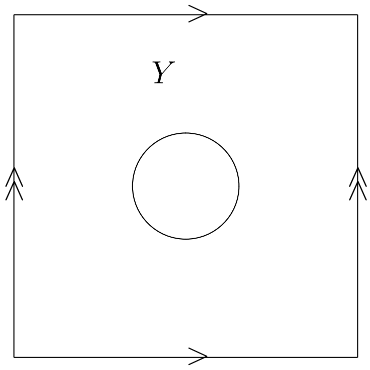
Sia $X \subset P$ l'insieme dei polinomi che non hanno radici reali. Sia $Y \subset P$ l'insieme dei polinomi con esattamente due radici reali distinte. Sia $Z \subset P$ l'insieme dei polinomi che hanno almeno una radice reale. X, Y, Z si intendono dotati della topologia indotta da P. (Si ricorda che il polinomio nullo ha infinite radici.)

(1) X è aperto?
(2) X è chiuso?
(3) X è connesso?
(4) Y è aperto?
(5) Y è connesso?
(6) Si dica se Y è denso in Z.
(7) Z è la chiusura di Y in P?
(8) Identificando P con $\mathbb{R}^3$, descrivere la chiusura proiettiva di X . Essa è omeomorfa alla chiusura proiettiva di Y?

Le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Esercizio 2. Sia A un ottagono regolare in $\mathbb{R}^2$ e sia X lo spazio ottenuto identificando i due lati orizzontali tra loro e i due lati verticali tra loro. Sia B un quadrato privato di un disco aperto e sia Y lo spazio ottenuto identificando i due lati orizzontali tra loro e i due lati verticali tra loro.





Si dica se

- X e Y sono connessi,
- X e Y sono compatti,
- X e Y sono T_2,
- X e Y sono localmente connessi,
- X e Y sono omeomorfi tra loro.

Esercizio 3. Siano X, Y due spazi topologici e siano A, B altri due spazi. Dimostrare che se A è omeomorfo a X e Y è omeomorfo a B allora $X \times Y$ è omeomorfo ad $A \times B$. È vero anche il viceversa?