Esercizio 1. In $\mathbb{R}^2$ sia $X = \{(x, 2^n x^2),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Si determini la chiusura di X.
(2) Si determini la chiusura proiettiva di X.
(3) Si dica se X è localmente connesso per archi.
(4) Si dica se X è connesso per archi.
(5) Si dica se $\bar{X}$ è localmente connesso per archi.
(6) Si dica se $\bar{X}$ è connesso per archi.
(7) Si dica se la chiusura proiettiva di X è localmente connessa per archi.
(8) Si dica se la chiusura proiettiva di X è connessa per archi.

Esercizio 2. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(1) $\mathbb{R}$ Euclideo è omeomorfo a $\mathbb{Q}$.
(2) Esiste una topologia su $\mathbb{R}$ che lo rende omeomorfo a $\mathbb{Q}$.
(3) $\mathbb{R}$ Euclideo è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$ Euclideo.
(4) Esiste una topologia su $\mathbb{R}$ che lo rende omeomorfo a $\mathbb{R}^3$ Euclideo.
(5) $\mathbb{R}$ Euclideo è compatto.
(6) Esiste una topologia su $\mathbb{R}$ che lo rende compatto.
(7) $\mathbb{R}$ Euclideo è connesso.
(8) $\mathbb{R}$ è connesso per qualsiasi topologia.
(9) $\mathbb{R}$ Euclideo è T_2.
(10) $\mathbb{R}$ è T_2 per qualsiasi topologia.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sia $\sim$ la relazione d'equivalenza generata da

$$(x, y) \sim (2x, 2y) \qquad\qquad (x, y) \sim (x', y)$$

al variare di $x, x', y \in \mathbb{R}$.

(1) Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è compatto.
(2) Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è connesso.
(3) Si dica se $\mathbb{R}^2/\sim$ è T_2.

Detto $\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$,

(1) Si dica se $\Pi_+/\sim$ è connesso.
(2) Si dica se $\Pi_+/\sim$ è T_2.
(3) Si dica se $\Pi_+/\sim$ è compatto.

Tutte le risposte devono essere adeguatamente giustificate.